Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 6 - MS650 - Métodos Matemáticos II, 13 de novembro de 2023.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Resolva os seguintes problemas de Cauchy, onde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$:

1. (2.5 Pontos) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = x, \end{cases}$

2. (2.5 Pontos) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = x^2, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases}$

3. (2.5 Pontos) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos(2x+t), \\ u(x,0) = 1, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases}$

4. (2.5 Pontos) $\begin{cases} u_{tt} + u_{xt} - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \sin x. \end{cases}$

Solução. *Este problema é uma variante do exercício 11 do capítulo 6.*

Item 1. *Idêntico ao item a) do exercício 11. Por inspeção, a solução é $u = xt$.*

Item 2. *Este também pode ser resolvido por inspeção... Porém, para quem não vê como fazer por inspeção, sabemos que a equação de onda para $x \in \mathbb{R}$ tem solução de D'Alembert $u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$. A condição inicial $u_t(x,0) = 0$ implica $f = g$. Impondo-se a outra condição, temos*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}(x+t)^2 = x^2 + t^2$$

Item 3. *Vamos primeiro encontrar uma solução particular da equação. Notem que a função $v = \frac{1}{3}\cos(2x+t)$ satisfaz a equação, mas não as condições inicias. A solução que procuramos será $u(x,t) = w(x,t) + \frac{1}{3}\cos(2x+t)$, sendo $w(x,t)$ solução da equação homogênea. As condições iniciais do problema homogêneo associado correspondem às condições*

$$\begin{cases} w(x,0) = 1 - \frac{1}{3}\cos 2x, \\ w_t(x,0) = \frac{1}{3}\sin 2x. \end{cases}$$

Com estas condições iniciais, temos da solução de D'Alembert

$$f(x) + g(x) = 1 - \frac{1}{3}\cos 2x, \quad g'(x) - f'(x) = \frac{1}{3}\sin 2x.$$

A solução final do problema será

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{3}\cos(2x+t) - \frac{1}{4}\cos 2(x+t) - \frac{1}{12}\cos 2(x-t).$$

Item 4. *Obviamente, há várias possibilidades para se resolver este problema. Vamos procurar uma solução geral da forma $u = f(x-\alpha t) + g(x+\beta t)$ (soluções sobre as curvas características). Substituindo-se este ansatz na equação, temos*

$$\left(\alpha^2 - \alpha - 1\right) f''(x-\alpha t) + \left(\beta^2 + \beta - 1\right) g''(x+\beta t) = 0,$$

cujas soluções são

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

A primeira condição inicial implica

$$u(x,t) = f(x-\alpha t) - f(x+\beta t).$$

Tomando-se as raízes positivas acima e impondo-se a segunda condição, temos

$$u_t(x,0) = -(\alpha+\beta)f'(x) = -\sqrt{5}f'(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x.$$

A solução final será

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\cos(x - \alpha t) - \cos(x + \beta t) \right),$$

sendo α e β as raízes positivas acima.

Notem que a existência da solução de D'Alembert para essa equação depende explicitamente do fato dela ser hiperbólica. Tente repetir o mesmo procedimento para uma equação elíptica e vejam o que acontece. Compare com a discussão do símbolo do operador diferencial...