Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 4 - MS650 - Métodos Matemáticos II, 9 de outubro de 2023.

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

A chamada equação do telégrafo (ou do telegrafista), que descreve a propagação de sinais eletromagnéticos ao longo de cabos elétricos, é a EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0,$$

sendo c a velocidade da luz e α e β, respectivamente, os parâmetros que caracterizam a capacitância e a indutância da linha. O entendimento qualitativo das soluções dessa equação foi fundamental para o desenvolvimento das tecnologias de telégrafo e assemelhados no início do século XX.

1. (5 Pontos) Obtenha as soluções da equação do telégrafo da forma

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(t,k) e^{-ikx} dk,$$

i.e., soluções que correspondem a transformadas de Fourier para cada instante t.

Solução. *Substituindo-se essa expressão na equação do telégrafo, temos*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial K}{\partial t} + (k^2c^2 + \alpha\beta)K \right) e^{-ikx} dk = 0.$$

Das nossas discussões sobre a Transformada de Fourier, sabemos que as restrições usuais sobre a função K nos garante que a

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial K}{\partial t} + (k^2c^2 + \alpha\beta)K = 0.$$

Essa é uma EDO conhecida (oscilador harmônico amortecido). Vamos procuras suas soluções do tipo $K = e^{\lambda t}$. Teremos

$$\left(\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda + k^2c^2 + \alpha\beta\right) e^{\lambda t} = 0,$$

cuja solução geral é

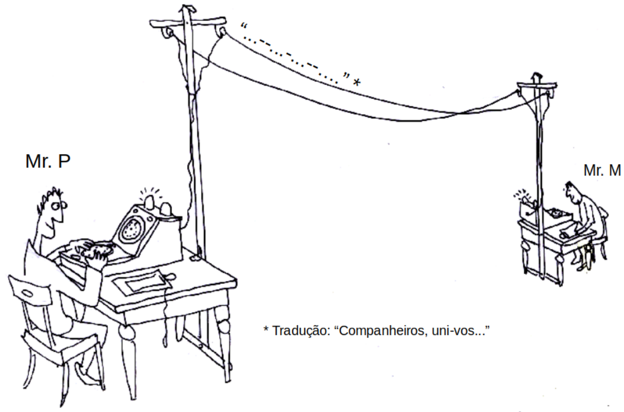
$$\lambda_\pm = -\frac{\alpha+\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4k^2c^2}.$$

Ficamos, portanto, com a seguinte combinação linear de soluções para K

$$K(t,k) = e^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)t} \left(C_k e^{\sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - k^2c^2}\,t} + D_k e^{-\sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - k^2c^2}\,t} \right),$$

sendo C_k e D_k coeficientes (funções de k) arbitrários. A solução geral para nossa equação será, portanto,

$$u(x,t) = \frac{e^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(C_k e^{\sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - k^2c^2}\,t} + D_k e^{-\sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - k^2c^2}\,t} \right) e^{-ikx} dk.$$



2. (2.5 Pontos)

Telégrafos transmitem código Morse. Vamos supor, como discutimos no semestre passado e teremos oportunidade de rediscutir em breve, que um ponto ".", o símbolo mais simples do código Morse, "emitido" no instante $t = 0$ no meio ($x = 0$) de uma linha infinita, corresponda a uma condição inicial que mistura os tipos "martelado" e "dedilhado" da linha como

$$u(x,0) = \delta(x), \quad \partial_t u(x,0) = -\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\delta(x).$$

Escreva a solução da equação do telégrafo que corresponde a essa situação.

Solução. *Notem que*

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C_k + D_k)\, e^{-ikx} dk = \delta(x),$$

de onde temos $C_k + D_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. *Para a outra condição, temos*

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,0) &= -\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C_k + D_k)\, e^{-ikx} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C_k - D_k) \sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - k^2c^2} e^{-ikx} dk, \\ &= -\frac{\alpha+\beta}{2}\delta(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C_k - D_k) \sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - k^2c^2} e^{-ikx} dk, \end{aligned}$$

e, portanto, da segunda condição temos $C_k = D_k$ *e ficamos com*

$$u(x,t) = \frac{e^{-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - k^2c^2}\, t\right) e^{-ikx} dk.$$

3. (2.5 Pontos) Uma boa linha deve ser "engenheirada" para ter $\alpha = \beta$. Escreva a evolução temporal do código Morse "." emitido em $x = 0$, no instante $t = 0$, para uma linha dessas. Comente tudo o que conseguir sobre essa evolução.

Solução. *A condição $\alpha = \beta$, que por acaso simplifica bastante a análise, é fundamental para o funcionamento do telégrafo. Ficamos com a seguinte solução nesse caso*

$$u(x,t) = \frac{e^{-\alpha t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos kct e^{-ikx} dk = \frac{e^{-\alpha t}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(x-ct)k} + e^{-i(x+ct)k}\right) dk = \frac{e^{-\alpha t}}{2} \left(\delta(x-ct) + \delta(x+ct)\right),$$

quer dizer, a solução são dois deltas que se movem, respectivamente, para a esquerda e para a direita! A solução é exponencialmente atenuada, mas ela não se distorce! Isso fundamental para o bom funcionamento de uma linha que propõe a transmitir informação. Uma boa linha deve sempre ter $\alpha = \beta$, para garantir que não há dispersão, com α e β menores possíveis. Voltaremos a comentar este assunto em breve.