Métodos Matemáticos II Turma Especial – MS650

Exame 3/Prova de Proficiência
27 de novembro de 2023

- *Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima é 10.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápis e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.* **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado será enviado por email.* *Boa prova!*

---

1. (2.5 Pontos) Explore a série de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ do exercício 2 do capítulo 1 do livro,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx,$$

e calcule $\zeta(4)$, sendo $\zeta(z)$ a nossa conhecida função zeta de Riemann $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Solução. *Está é a questão 2 do T1.*

2. (2.5 Pontos) Esboce a função $\Upsilon(\theta) = \int_{\pi}^{\theta} \text{Ш}(x)\, dx$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, sendo

$$\text{Ш}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x + 2k\pi)$$

a chamada função pente de Dirac.

Solução. *Está é a questão 4 do T2.*

3. (2.5 Pontos) Obtenha a solução geral da equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\kappa > 0$, da forma

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(t,\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

i.e., soluções que correspondem a transformadas de Fourier para cada instante t.

Solução. *Esta é a questão 1 do T5.*

4. (2.5 Pontos) Resolva o seguinte problema de Cauchy, onde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t, \\ u(x,0) = \cos x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Solução. *Note que a função $u(x,t) = \frac{t^3}{6}$ satisfaz a equação, mas não as condições iniciais. A solução que* *procuramos será* $u(x,t) = w(x,t) + \frac{t^3}{6}$, *sendo* $w(x,t)$ *a solução geral da equação homogênea, com as mesmas condições iniciais. A solução será*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\cos(x-t) + \frac{1}{2}\cos(x+t) + \frac{t^3}{6}.$$

5. (2.5 Pontos) Considere o seguinte problema de valor inicial, onde $u = u(x,t)$, $x \geq 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Este problema é bem posto no sentido de Hadamard? Justifique.

Solução. *Trata-se de um problema bem posto cuja solução é*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin(x-t) + \frac{1}{2}\sin(x+t),$$

i.e. *este problema é a restrição para* $x \geq 0$ *do problema equivalente com* $x \in \mathbb{R}$, *o qual sabemos ser bem posto.*

O ponto crucial é que a condição $u(0,t) = 0$ *é identicamente satisfeita.*