Métodos Matemáticos II Turma Especial – MS650

Exame 2/Prova de Proficiência
1 de novembro de 2023

- *Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima é 10.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápiz e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.* **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado será enviado por email.* *Boa prova!*

---

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \sin \alpha x, & \text{para } |x| \le \pi, \\ 0, & \text{para } |x| > \pi, \end{cases}$$

com $\alpha > 0$.

(a) (1.0 Ponto) Determine a transformada de Fourier $F(k)$ de $f(x)$.

(b) (1.5 Ponto) Discuta o comportamento assintótico ($k \to \infty$) de $F(k)$ como função de α.

Solução item 1. *Temos*

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \sin \alpha x dx = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sin kx \sin \alpha x dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\cos(k+\alpha)x - \cos(k-\alpha)x)\, dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(k-\alpha)\pi}{k-\alpha} - \frac{\sin(k+\alpha)\pi}{k+\alpha} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

Solução item 2. *Há dois comportamentos diferentes, dependendo se α é um inteiro ou não. Já sabemos disso inspecionando-se a função $f(x)$. Se α for inteiro, a função é contínua (C^0), e esperamos um decaimento do tipo k^{-2} para $F(k)$. Por outro lado, se α não for inteiro, a função $f(x)$ é descontínua e sua transformada de Fourier deve decair como k^{-1}. Para $k \gg 1$ grande, temos*

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \left(\frac{\sin(k-\alpha)\pi}{1-\frac{\alpha}{k}} - \frac{\sin(k+\alpha)\pi}{1+\frac{\alpha}{k}} \right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \left[\sin(k-\alpha)\pi \left(1 + \frac{\alpha}{k} + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 + \cdots \right) - \sin(k+\alpha)\pi \left(1 - \frac{\alpha}{k} + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 + \cdots \right) \right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \left[(\sin(k-\alpha)\pi - \sin(k+\alpha)\pi) \left(1 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 + \cdots \right) + (\sin(k-\alpha)\pi + \sin(k+\alpha)\pi) \left(\frac{\alpha}{k} + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^3 + \cdots \right) \right], \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}k} \left(\sin(k-\alpha)\pi - \sin(k+\alpha)\pi + \frac{\alpha}{k} (\sin(k-\alpha)\pi + \sin(k+\alpha)\pi) \right) \left(1 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 + \cdots \right), \end{aligned}$$

de onde vemos que, para α arbitrário, $F(k)$ decai efetivamente como k^{-1} para $k \gg 1$. Porém, para α inteiro a situação é diferente. Se α for impar, temos

$$\sin(k-\alpha)\pi = \sin(k+\alpha)\pi = -\sin k\pi.$$

De maneira análoga, para α par, temos

$$\sin(k-\alpha)\pi = \sin(k+\alpha)\pi = \sin k\pi,$$

de onde temos que, para α inteiro,

$$F(k) = \frac{(-1)^\alpha 2ai \sin k\pi}{\sqrt{2\pi} k^2}\left(1 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 + \cdots\right)$$

mostrando que neste caso o comportamento assintótico é, como esperávamos, do tipo k^{-2}.

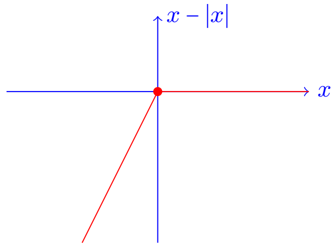
2. Calcule e esboce as duas primeiras derivadas distribucionais das funções abaixo.

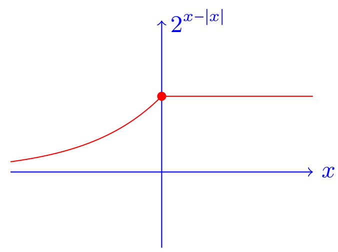
   (a) (1 Ponto) $f(x) = 2^{x-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Solução. *Como sempre, é instrutivo fazer um gráfico para entender o que está acontecendo. Notem que*

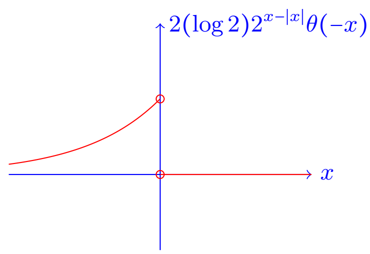
$$x - |x| = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

   i.e., trata-de de uma função C^0 sem derivada em $x = 0$. Já sabemos onde deve aparecer os termos distribucionais.





   A primeira derivada será $f'(x) = (\log 2)2^{x-|x|}(1 - \text{sign}\, x)$. Podemos simplificar este resultado lembrando que $\text{sign}(x) = 2\theta(x) - 1$. Ficamos com $f'(x) = 2(\log 2)2^{x-|x|}\theta(-x)$



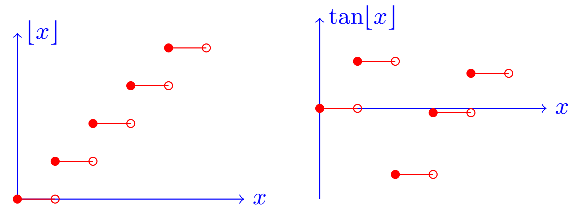
   Notem que há um salto de $-2\log 2$ na derivada. A segunda derivada será

$$f''(x) = 4(\log 2)^2 2^{x-|x|}\theta(-x) - 2(\log 2)\delta(x),$$

   cujo gráfico é qualitativamente igual ao anterior, excetuando-se a delta na origem.

   (b) (1.5 Ponto) $f(x) = \tan\lfloor x \rfloor$, sendo $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de $x > 0$.

   Solução. *A função $\lfloor x \rfloor$ é nossa conhecida "escadinha", sua composição com a função $\tan x$ nos dará uma escadinha com degraus de altura $\tan k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, vejam abaixo*



As derivadas tarão apenas a parte distribucional, quer dizer, é zero em todos os pontos, exceto para x inteiro positivo. Teremos

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\tan k - \tan(k-1))\delta(x-k), \quad f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\tan k - \tan(k-1))\delta'(x-k).$$

3. (2.5 Ponto) A EDP

$$\partial_t v + v\partial_x v = 0$$

é chamada na literatura de equação de Hopf e descreve certos fenômenos ondulatórios não-lineares em Mecânica dos Fluídos. Obtenha sua solução com condição inicial $v(0,x) = g(x)$. (Pode ser escrita de forma implícita).

Esta questão esteve na P2 do curso de 2017, cuja solução está no site da disciplina. Há duas possíveis soluções distintas.

Solução 1 – Explorando as curvas características. *As equações características são*

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = v, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1,$$

cujas soluções são: $v(\tau,\sigma) = v_0(\sigma)$, $x(\tau,\sigma) = v_0(\sigma)\tau + x_0(\sigma)$ e $t(\tau,\sigma) = \tau + t_0(\sigma)$. Pode-se implementar a condição inicial $v(0,x) = g(x)$ como:

$$t(\tau,\sigma) = \tau, \quad x(\tau,\sigma) = g(\sigma)\tau + \sigma, \quad v(\tau,\sigma) = g(\sigma)$$

e a solução será portanto

$$g(x - vt) = v.$$

Solução 2 – Talvez mais "física". *A equação*

$$\partial_t v + c\partial_x v = 0$$

é uma velha conhecida nossa. Trata-se de uma "parte" da equação da onda usual, lembrem-se que

$$(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = (\partial_t v + c\partial_x)(\partial_t v - c\partial_x)u,$$

e descreve as ondas dextrógiras, as ondas que caminham para direita (ondas direitistas, pra contrabalancear as esquerdistas da P1 e termos um curso equilibrado politicamente...) do tipo

$$v = f(x - ct),$$

com f arbitrário. Comparando-se com a equação de Hopf, concluímos que esta é uma espécie de equação de ondas dextrógiras, mas cujas velocidades dependem da amplitude, um efeito obviamente não-linear (por que?). Poderíamos, então, procurar soluções dadas implicitamente por

$$v = f(x - vt).$$

Derivando-se ambos os lados em relação a x temos

$$v_x = (1 - v_x t) f' \Rightarrow v_x = \frac{f'}{1 + t f'}.$$

De maneira análoga temos

$$v_t = -\frac{v f'}{1 + t f'},$$

de onde concluímos que $v = f(x - vt)$, para f arbitrário, é de fato a solução que procuramos! Basta agora impor a condição inicial.

Este problema é tão interessante (acreditem!) que vale a pena olharmos com mais cuidado um caso explícito. Tomemos, por exemplo, o caso em que $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Quer dizer, para $t = 0$, nossa onda tem o aspecto da Fig. 1. Nossa intuição diz que, para $t > 0$, essa onda deve se mover para a direita, porém sua forma não se manterá inalterada. Como a velocidade de propagação é proporcional a v, sua base, para a qual $v \approx 0$, se moverá muito lentamente. Já o topo, se moverá mais rapidamente. Imagino que vocês estão conseguindo visualizar o que ocorre: a onda está "se quebrando"! Com essa condição inicial, é facil invertermos as expressões

$$\frac{1}{1 + (x - vt)^2} = v \Rightarrow t^2 v^3 - 2xtv^2 + (1 + x^2)v - 1 = p(v) = 0.$$

Quer dizer, nossa solução $v(x,t)$ corresponde às raizes de um polinômio cúbico com coeficientes que são funções de x e t. A "quebra" da onda corresponde ao instante no qual o polinômio deixa de ter uma única solução real. Sabemos que este polinômio pode ter três raizes reais distintas, e podemos determinar a partir do polinômio $p(v)$ as regiões de x e os instantes de tempo t nos quais ocorrem a "quebra" da onda, como a mostrada na a seguir.

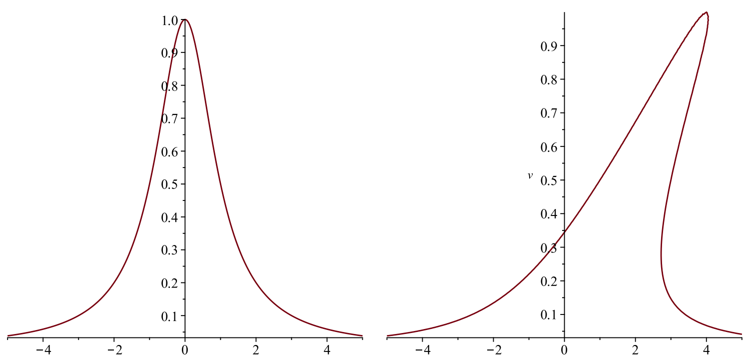


Figura 1: Esquerda: Condição inicial $v(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$ para a equação de Hopf. Direita: Solução da equação de Hopf com essa condição inicial, para $t = 4$. A onda "se quebra". Assim como no caso da equação do telégrafo, talvez pudéssemos chamar a equação de Hopf como equação do surfista...

Pode-se fazer uma IC (ou até mais) só com esta equação. Por exemplo, o que ocorre com a solução com condição inicial $v(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$?

4. Considere a chamada equação bi-harmônica em duas dimensões

$$\nabla^4\phi = 0,$$

sendo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2\phi) = \nabla\cdot\nabla(\nabla\cdot\nabla\phi)$.

(a) (0.5 Ponto) Mostre que esta equação é separável em coordenadas cartesianas.

Solução. *Em duas dimensões,*

$$\nabla^4\phi = \partial_x^4\phi + 2\partial_x^2\partial_y^2\phi + \partial_y^4\phi = 0.$$

Fazendo-se $\phi = X(x)Y(y)$, ficamos com

$$X''''Y + 2X''Y'' + XY'''' = 0$$

dividindo-se por XY e rearranjando-se os termos

$$\frac{X''''}{X} = -2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y} - \frac{Y''''}{Y}$$

Derivando-se ambos os lados em relação a y, ficamos com

$$2\frac{X''}{X}\frac{d}{dy}\left(\frac{Y''}{Y}\right) = -\frac{d}{dy}\left(\frac{Y''''}{Y}\right),$$

que é separável e nos dá

$$X'' + \frac{\lambda^2}{2}X = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{2}\right)X = 0,$$

Levando-se na equação original, temos

$$Y'''' - \lambda^2 Y'' + \frac{\lambda^4}{4}Y = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 Y = 0.$$

que mostra que a equação é de fato separável. De maneira análoga, temos também as soluções

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\lambda^2}{2}\right)Y = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 X = 0.$$

(b) (1.0 Ponto) Mostre que existem soluções não nulas para a equação bi-harmônica no domínio $\mathcal{D} = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ tais que $\phi = 0$ sobre a fronteira $\partial\mathcal{D}$.

Solução 1. *Seja $\psi(x,y)$ uma solução da equação de Poisson*

$$\nabla^2\psi = f(x,y),$$

com a fonte $f(x,y)$ harmônica, i.e., $\nabla^2 f = 0$. *É fácil ver que ψ é solução da bi-harmônica. Vamos explorar este resultado simples para mostrar que existem soluções não triviais da bi-harmônica que se anulam na fronteira $\partial\mathcal{D}$. Tome, por exemplo, $f(x,y) = 1$. Uma solução particular da equação de Posson seria*

$$\psi_p = \frac{x^2}{2}.$$

A solução geral, que será solução da bi-harmônica, neste caso é

$$\psi(x,y) = \eta(x,y) + \frac{x^2}{2},$$

sendo $\eta(x,y)$ uma função harmônica, i.e., *solução da equação de Laplace*

$$\nabla^2\eta = 0.$$

Considerem agora a seguinte condição de contorno para $\eta(x,y)$

$$\eta(0,y) = 0, \quad \eta(1,y) = -\frac{1}{2}, \quad \eta(x,0) = \eta(x,1) = -\frac{x^2}{2},$$

a qual é uma condição de Dirchlet standard, que garante que o problema é bem posto. Com esta escolha para $\eta(x,y)$, teremos por construção $\psi(x,y)$ se anulando na fronteira $\partial\mathcal{D}$, mas não eu seu interior, pois obviamente $\eta(x,y) \neq -\frac{x^2}{2}$, o que demonstra a existência da solução procurada.

Solução 2. *Vamos explorar a separação de variáveis do item anterior. Temos que resolver as EDOs para $X(x)$ e $Y(y)$ para λ arbitrário. Comecemos pela equação para $X(x)$. Como procuramos uma solução com condições de contorno homgêneas, já sabemos que o caso relevante é com λ real. Uma possível solução satisfazendo $X(0) = X(1) = 0$ é*

$$X(x) = \sin\pi x,$$

que corresponde a $\lambda = \sqrt{2}\pi$. Neste caso, a equação associada a $Y(y)$ é

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \pi^2\right)^2 Y = \left(\frac{d}{dy} - \pi\right)^2\left(\frac{d}{dy} + \pi\right)^2 Y = 0,$$

de onde obtemos duas soluções facilmente: $Y = e^{\pi y}$ e $Y = e^{-\pi y}$. Porém, está é uma equação de quarta ordem, faltam ainda duas soluções, as quais procuraremos explorando o método de variação de parâmetros. Notem que

$$\left(\frac{d}{dy} - \pi\right) f(y)e^{\pi y} = f'(y)e^{\pi y},$$

de onde temos diretamente que

$$\left(\frac{d}{dy} - \pi\right)^2 ye^{\pi y} = 0,$$

de onde temos finalmente o conjunto completo das soluções

$$Y(y) = (a+by)e^{\pi y} + (c+dy)e^{-\pi y} = (A+By)\sinh\pi y + (C+Dy)\cosh\pi y$$

Vamos agora impor as condições homogêneas

$$Y(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad Y(1) = 0 \Rightarrow (A+B)\sinh\pi + D\cosh\pi = 0,$$

que tem como solução mais simples $D = 0$ e $A = -B$. Ficamos então, finalmente, com a seguinte solução não trivial da bi-harmônica que se anula ao longo do contorno:

$$\phi = (1-y)\sinh\pi y\sin\pi x.$$

(c) (1.0 Ponto) Apresente pelo menos um conjunto de condições para ϕ sobre a fronteira $\partial\mathcal{D}$ do item anterior suficiente para garantir que o problema seja bem posto. (Basta garantir unicidade das soluções.)

Solução 1 - Explorando os funcionais de energia. *Podemos adotar a mesma estratégia usada para a equação de Laplace,* i.e., *tentaremos determinar que condições homogêneas devem ser aplicadas na* *fronteira para garantir que a única solução da bi-harmônica seja a solução trivial. Considerem a seguinte identidade vetorial de demonstração direta:*

$$\nabla \cdot \big(\phi \nabla (\nabla^2 \phi)\big) = (\nabla \phi) \cdot \nabla (\nabla^2 \phi) + \phi \nabla^4 \phi$$

Integrando-se em $\mathcal{D}$ para soluções da bi-harmônica, temos

$$\int_{\mathcal{D}} (\nabla \phi) \cdot \nabla (\nabla^2 \phi)\, da = \oint_{\partial \mathcal{D}} \phi \hat{n} \cdot \nabla (\nabla^2 \phi)\, ds.$$

Porém, temos também esta outra identidade, igualmente fácil de demonstrar

$$\nabla \cdot \big((\nabla^2 \phi) \nabla \phi\big) = (\nabla^2 \phi)^2 + (\nabla \phi) \cdot \nabla (\nabla^2 \phi)$$

de onde temos finalmente

$$\int_{\mathcal{D}} (\nabla^2 \phi)^2\, da = \oint_{\partial \mathcal{D}} (\hat{n} \cdot \nabla \phi) \nabla^2 \phi\, ds - \oint_{\partial \mathcal{D}} \phi \hat{n} \cdot \nabla (\nabla^2 \phi)\, ds.$$

Notem que, se as integrais do lado direito se anulam, teremos necessariamente $\nabla^2 \phi = 0$ em $\mathcal{D}$. Sabemos que a Equação de Laplace tem solução trivial se $\phi = 0$ ou se $\hat{n} \cdot \nabla \phi = 0$ em $\partial \mathcal{D}$. Por outro lado, se tivermos $\phi = 0$ e $\hat{n} \cdot \nabla \phi = 0$ simultaneamente em $\partial \mathcal{D}$, ambas as integrais do lado direito se anularão, e mais ainda teremos $\phi = 0$ em $\mathcal{D}$. Quer dizer, a aplicação simultânea de condições de Neuman e de Dirchlet garantem unicidade para a bi-harmônica. Há também as possibilidades de fixarmos ϕ e $\nabla^2 \phi$, ou $\hat{n} \cdot \nabla \phi$ e $\hat{n} \cdot \nabla (\nabla^2 \phi)$ sobre o contorno. Nestes dois casos, também teríamos soluções únicas garantidas.

Solução 2 - Explorando a separação de variáveis.

Já sabemos do item anterior que $\phi = 0$ sobre a fronteira não é suficiente para garantirmos unicidade das soluções. Devemos impor uma outra condição além da de Dirichlet. Os modos que não se anulam impondo-se $\phi = 0$ sobre a fronteira são do tipo

$$u = ((a + by) \sinh n\pi y + dy \cosh n\pi y) \sin n\pi x,$$

com $(a + b) \sinh n\pi + d \cosh n\pi = 0$. De maneira análoga, há o caso no qual invertemos x e y. Temos três incógnitas (a, b e c) e uma só equação. Com duas equações mais, podemos ter alguma esperança. Estas equações podem vir, por exemplo, da condição de Neuman: impor $\partial_x u = 0$ em $x = 0$ e $x = 1$ ou $\partial_y u = 0$ em $y = 0$ e $y = 1$. Em outras palavras, a utlização de condições de Dirchlet e de Neuman simultaneamente *garante que o problema será bem posto.*

5. (2.5 Pontos) Obtenha as soluções da equação do telégrafo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \beta u = 0,$$

da forma

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(t, k) e^{-ikx} dk,$$

$i.e.$, soluções que correspondem a transformadas de Fourier para cada instante t, e resolva o problema de valor inicial

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad \partial_t u(x, 0) = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\delta(x).$$

Solução. *Veja o T4.*