Prova 2 – Métodos Matemáticos II – MS650
1 de dezembro de 2023

- *Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima é 10.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápis e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.* **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas, o mais rápido possível, no site do curso:* `http://vigo.ime.unicamp.br/ms650`

Boa prova, boas férias, feliz Natal e Ano Novo!

1. (2.5 Pontos) A transformada de Mellin $F(s)$ de uma função $f(x)$ é definida como

$$\mathcal{M}[f(x)] = F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx,$$

sempre que a integral existir, o que em geral requer $a < \Re s < b$, sendo o intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ chamado de faixa fundamental. Mostre que

$$\zeta(s) = s\mathcal{M}\left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right],$$

sendo $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, e $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$, $\Re s > 1$, a função zeta de Riemann.

Solução. *Esta era a última questão da P2 do curso de 2017, a solução está no site. Notem que*

$$\mathcal{M}\left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right] = \int_0^\infty \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty \frac{\lfloor y \rfloor}{y^{s+1}}\, dy,$$

sendo que fizemos a mudança $x = \frac{1}{y}$. Notem, porém, que $\lfloor y \rfloor = 0$ para $0 \le y < 1$, e a integral é portanto

$$\mathcal{M}\left[\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right] = \int_1^\infty \frac{\lfloor y \rfloor}{y^{s+1}}\, dy,$$

Os problemas de convergência virão do limite $y \to \infty$. Porém

$$\left| \frac{\lfloor y \rfloor}{y^{s+1}} \right| \le y^{-\Re s},$$

e portanto $\Re s > 1$ é suficiente para garantir a convergência da integral. A faixa fundamental é neste caso $(1, \infty)$. Passemos agora ao cálculo explícito da integral. Notem que

$$\int_1^\infty \frac{\lfloor y \rfloor}{y^{s+1}}\, dy = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{n}{y^{s+1}} dy = \sum_{n=1}^\infty n \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{y^{s+1}} dy \right) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty n \left(\frac{1}{y^s} \right)_{n+1}^{n}.$$

Considerem o somatório

$$\sum_{n=1}^N n \left(\frac{1}{y^s} \right)_{n+1}^{n} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3\left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + 4\left(\frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s}\right) + \cdots + N\left(\frac{1}{N^s} - \frac{1}{(N+1)^s}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N}{(N+1)^s}.$$

Com $\Re s > 1$, temos que o limite $N \to \infty$ corresponde efetivamente a função $\zeta(s)$, o que estabelece o resultado. Esta questão tem outros desdobramentos interessantes, vejam a prova de 2017.

2. (2.5 Pontos) Mostre que a equação bi-harmônica em duas dimensões $\nabla^4\phi = 0$, sendo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2\phi) = \nabla\cdot\nabla(\nabla\cdot\nabla\phi)$, é separável em coordenadas cartesianas e escreva as equações separadas para x e y.

Solução. *Esta questão vem sendo recicladas há anos... Em duas dimensões,*

$$\nabla^4\phi = \partial_x^4\phi + 2\partial_x^2\partial_y^2\phi + \partial_y^4\phi = 0.$$

Fazendo-se $\phi = X(x)Y(y)$, ficamos com

$$X''''Y + 2X''Y'' + XY'''' = 0$$

dividindo-se por XY e rearranjando-se os termos

$$\frac{X''''}{X} = -2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y} - \frac{Y''''}{Y}$$

Derivando-se ambos os lados em relação a y, ficamos com

$$2\frac{X''}{X}\frac{d}{dy}\left(\frac{Y''}{Y}\right) = -\frac{d}{dy}\left(\frac{Y''''}{Y}\right),$$

que é separável e nos dá

$$X'' + \frac{\lambda^2}{2}X = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{2}\right)X = 0,$$

Levando-se na equação original, temos

$$Y'''' - \lambda^2 Y'' + \frac{\lambda^4}{4}Y = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 Y = 0.$$

que mostra que a equação é de fato separável. De maneira análoga, temos também as soluções

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\lambda^2}{2}\right)Y = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 X = 0.$$

3. (2.5 Pontos) Considere o seguinte problema de valor inicial, onde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} + \gamma u_{xt} + u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \sin x, \end{cases}$$

sendo $\gamma \in \mathbb{R}$. Determine os valores de γ para os quais este problema é bem posto no sentido de Hadamard e resolva-o.

Solução. *Esta é uma variante de um dos itens do T6. Como posto, o problema só será bem posto se a equação for hiperbólica, o que requer $\gamma^2 - 4 > 0$ e, portanto, $|\gamma| > 2$. Obviamente, há várias possibilidades para se resolver este problema. Vamos procurar uma solução geral da forma $u = f(x-\alpha t) + g(x+\beta t)$ (soluções sobre as curvas características). Substituindo-se este ansatz na equação, temos*

$$\left(\alpha^2 - \gamma\alpha + 1\right) f''(x - \alpha t) + \left(\beta^2 + \gamma\beta + 1\right) g''(x + \beta t) = 0,$$

cujas soluções são

$$\alpha = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}, \quad \beta = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}.$$

Vamos tomar as soluções com sinal positivo do discriminante. A primeira condição inicial implica

$$u(x,t) = f(x-\alpha t) - f(x+\beta t).$$

Impondo-se a segunda condição, temos

$$u_t(x,0) = -(\alpha+\beta)f'(x) = -\sqrt{\gamma^2-4}f'(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-4}}\cos x.$$

A solução final será

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-4}}\left(\cos(x-\alpha t) - \cos(x+\beta t)\right),$$

sendo α e β as raízes calculadas acima.

4. Considere a equação modificada do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa_2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

com $-\infty < x < \infty$ e $\kappa_1, \kappa_2 > 0$.

(a) (1 Ponto) Obtenha sua solução geral da forma

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(t,\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda,$$

i.e., soluções que correspondem a transformadas de Fourier para cada instante t.

Solução. *Substituindo-se essa expressão na equação do calor, temos*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_t K + \kappa_1\lambda^2 K - \kappa_2\lambda^4 K\right)e^{-i\lambda x}d\lambda = 0.$$

A EDO para K tem solução simples, $K(t,\lambda) = A(\lambda)e^{-\left(\kappa_1\lambda^2-\kappa_2\lambda^4\right)t}$, e ficamos com a solução final

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x-\left(\kappa_1\lambda^2-\kappa_2\lambda^4\right)t}d\lambda.$$

A situação é bastante parecida com a questão do T5.

(b) (1.5 Pontos) Escreva a solução estacionária ($\partial_t u = 0$) geral.

Solução. *A solução estacionária é tal que*

$$\partial_x^2\left(u + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_x^2 u\right) = 0,$$

cuja solução geral é

$$u(x) = A + Bx + C\sin\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}x + D\cos\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}x.$$

5. (2.5 Pontos) Mr. F acordou em uma casa e não fazia ideia do por quê estava ali. A única coisa que sabia é que tinha trabalho a fazer. E esse trabalho envolvia equações elípticas[1] e consistia em entender uma questão de um curso antigo de Métodos sobre a equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ em domínios $D \in \mathbb{R}^2$. Na solução, afirmava-se (corretamente) que o problema de contorno

[1] Adaptação livre deste interessante game.

$\phi(x,y) = 0$ sobre ∂D e $\phi(0,0) = 1$ para o disco $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ é mal posto, mas para um domínio em forma de anel $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, o problema $\phi(x,y) = 0$ sobre o circulo externo e $\phi(x,y) = 1$ sobre o interno é bem posto. Ocorre que o primeiro caso é o limite $a \to 0$ do segundo. Como isso é possível? Explique porque um problema e bem posto e outro é mal posto, resolva o bem posto, e discuta o que acontece no limite. Liberte Mr. F desse pesadelo!

Solução. *Esta questão estava no exame de 2017. O primeiro problema não é bem posto. A imposição de $u(x,y) = 0$ sobre a fronteira ∂D do disco já especifica completamente a solução, que será a trivial e, portanto, não existe nenhuma solução com as condições indicadas.*

Vamos ao problema do anel, $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, $\phi(x,y) = 0$ sobre o círculo de raio 1 e $\phi(x,y) = 1$ sobre o círculo de raio $a < 1$. Este problema é bem posto, e sua solução pode ser escrita facilmente em coordenadas polares $\phi(r) = A \log r$, sendo $A^{-1} = \log a$. Está claro o que acontece, a solução do anel só está definida pra $a > 0$, o limite $a \to 0$ é singular.