Exame Final – Métodos Matemáticos II – MS650
11 de dezembro de 2023

- *Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima é 10.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápiz e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.* **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas, o mais rápido possível, no site do curso:* `http://vigo.ime.unicamp.br/ms650`

Boa prova, boas férias, feliz Natal e Ano Novo!

---

1. (2.5 Pontos) Determine a transformada inversa de Laplace da função zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re s > 1.$$

(Dica: explore a transformada de Laplace da função delta de Dirac.)

Solução. *A dica nos diz para considerar*

$$\mathcal{L}\left[\delta(x-a)\right] = \int_0^\infty \delta(x-a)e^{-sx}dx = e^{-as}.$$

Note que para $a = \log n$, teremos $\mathcal{L}\left[\delta(x-\log n)\right] = e^{-s\log n} = n^{-s}$, que implica em

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}\left[\delta(x-\log n)\right] = \zeta(s)$$

e finalmente em

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\zeta(s)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-\log n).$$

2. (2.5 Pontos) Encontre a solução da equação integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)du}{(x-u)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2},$$

com $b > a > 0$. (Dica: explore a transforma de Fourier.)

Solução. *Esse é problema 13 do capítulo 3 do livro, que foi resolvido em aula. O lado esquerdo pode ser escrito como o seguinte produto de convolução*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)du}{(x-u)^2+a^2} = \sqrt{2\pi}\left(y(u) \star \frac{1}{u^2+a^2}.\right)(x)$$

Calculando-se a transformada de Fourier de ambos os lados da equação integral

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[y(x)]\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+b^2}\right].$$

Do exemplo 3.2 do livro, temos

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|k|}}{a},$$

o que nos dá

$$\mathcal{F}[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{b}e^{-(b-a)|k|}.$$

O mesmo exemplo 3.2 nos permite escrever

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a(b-a)}{b}\mathcal{F}^{-1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-(b-a)|k|}}{b-a}\right] = \frac{a(b-a)}{b\pi(x^2+(b-a)^2)}$$

3. Considere a função piso $\lfloor x \rfloor$, a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$ não negativo. Determine:

   (a) (1 Ponto) sua transformada de Laplace $\mathcal{L}\left[\lfloor x \rfloor\right]$;

   Solução. *Há várias maneiras de se calcular essa transformada de Laplace. Comecemos com a mais direta, via definição:*

$$\mathcal{L}\left[\lfloor x \rfloor\right] = \int_0^\infty \lfloor x \rfloor e^{-sx}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} e^{-sx}dx = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{-sn} - e^{-s(n+1)}\right).$$

   Esse somatório é telescópico, vejam

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{-sn} - e^{-s(n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{-s(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-s(n+1)} = e^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(n+1)} = \frac{e^{-s}}{1-e^{-s}},$$

   de onde segue o resultado final

$$\mathcal{L}\left[\lfloor x \rfloor\right] = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.$$

   Uma maneira mais fácil e direta é explorando a linearidade da transformada de Laplace e a propriedade do deslocamento (P2 do livro), que pode ser facilmente deduzida. A ideia é explorar a identidade

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + \theta(x),$$

   sendo $\theta(x)$ a função de Heaviside, cuja transformada é trivial $\mathcal{L}\left[\theta(x)\right] = \frac{1}{s}$. Calculando-se a transformada de ambos os lados da expressão acima, ficamos com

$$\mathcal{L}\left[\lfloor x+1 \rfloor\right] = e^{s}\mathcal{L}\left[\lfloor x \rfloor\right] = \mathcal{L}\left[\lfloor x \rfloor\right] + \mathcal{L}\left[\theta(x)\right] = \mathcal{L}\left[\lfloor x \rfloor\right] + \frac{1}{s},$$

   de onde o resultado segue diretamente.

   (b) (1.5 Pontos) a transformada de Laplace de sua derivada distribucional, $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dx}\lfloor x \rfloor\right]$.

   Solução. *A derivada distribucional da função piso está calculada na solução de P1. Como estamos interessados apenas nos valores não negativos de x, temos*

$$\frac{d}{dx}\lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^{\infty}\delta(x-k),$$

   de onde temos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dx}\lfloor x \rfloor\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{L}\left[\delta(x-k)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-ks} = \frac{e^{-s}}{1-e^{-s}},$$

   que é consistente com a propriedade da derivada usual (P8 do livro) das TL.

4. Considere a equação de Poisson $\nabla^2\phi(x,y) = \rho(x,y)$ no domínio correspondente ao disco unitário $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 1\right\}$. Sabe-se que a equação admite como solução $\phi = \phi_1 = e^{x^2-y^2}$.

(a) (1.5 Pontos) Nas coordenadas polares (r,θ) adaptadas ao disco $\mathcal{D}$, determine a função ρ e escreva a solução geral da equação.

Solução. *Em coordenadas polares, $x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$, e portanto $\phi_1 = e^{r^2\cos 2\theta}$. Como ϕ_1 é uma solução do problema, teremos*

$$\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r\phi_1 + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\phi_1 = \rho.$$

Essa conta é mais fácil de ser feita em coordenadas cartesianas

$$\partial_x^2\phi_1 + \partial_y^2\phi_1 = 4(x^2+y^2)e^{x^2-y^2},$$

de onde temos finalmente

$$\rho = 4r^2 e^{r^2\cos 2\theta}.$$

A solução geral será ϕ_1 mais a solução da homogênea, que após a separação de variáveis $\phi = R(r)\Theta(\theta)$ pode ser escrita como

$$\frac{r}{R}\partial_r r\partial_r R = -\frac{\Theta''}{\Theta} = m^2.$$

A solução para Θ será $\Theta_m = A\sin m\theta + B\cos m\theta$, com m inteiro. A equação para R será

$$r^2R'' + rR' - m^2R = 0,$$

que é uma equação homogênea de Euler com solução $R = Cr^m + Dr^{-m}$. A condição de suavidade na origem nos dá $D = 0$. Ficamos com a seguinte solução geral para o problema

$$\phi = \phi_1 + \sum_{m=0}^{\infty} r^m(A_m\sin m\theta + B_m\cos m\theta).$$

(b) (1 Ponto) Determine as condições de contorno que dão origem à solução $\phi = \phi_1$.

Solução. *A solução $\phi = \phi_1$ tem $A_m = B_m = 0$, que corresponde a exigir que $\phi(1,\theta) = e^{\cos 2\theta}$.*

(Laplaciano em coordenadas polares: $\nabla^2 = \frac{1}{r}\partial_r r\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$)

5. (2.5 Pontos) Escreva a solução geral da equação $u_{tt} - u_{xx} = \sin xt$, com $x \in \mathbb{R}$. (Dica: procure soluções particulares com termos do tipo $u_1(x-t)u_2(x+t)$ e explore a primeira forma canônica para equações hiperbólicas.)

Solução. *A solução geral é do tipo $u(x,t) = f(x-t) + g(x+t) + h(x,t)$. Obviamente, o ponto da questão é a determinação da solução particular. Vamos usar a dica. Introduzindo-se as novas variáveis $x - t = \xi$ e $x + t = \nu$, a equação fica*

$$\partial_\xi\partial_\nu u(\xi,\nu) = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{4}\left(\xi^2 - \nu^2\right) = \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\xi^2}{4}\cos\frac{\nu^2}{4} - \cos\frac{\xi^2}{4}\sin\frac{\nu^2}{4}\right).$$

Ainda da dica, vamos considerar uma solução particular da forma

$$h(\xi,\nu) = u_1(\xi)u_2(\nu) - u_3(\xi)u_4(\nu).$$

Da equação, teremos

$$\partial_\xi\partial_\nu h = u_1'(\xi)u_2'(\nu) - u_3'(\xi)u_4'(\nu) = \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\xi^2}{4}\cos\frac{\nu^2}{4} - \cos\frac{\xi^2}{4}\sin\frac{\nu^2}{4}\right)$$

o que nos permite imediatamente identificar

$$u_1' = \frac{1}{2}\sin\frac{\xi^2}{4}, \quad u_2' = \frac{1}{2}\cos\frac{\nu^2}{4}, \quad u_3' = \frac{1}{2}\cos\frac{\xi^2}{4}, \quad u_4' = \frac{1}{2}\sin\frac{\nu^2}{4},$$

de onde temos a solução final

$$h(x,t) = \frac{1}{4}\left(\int_0^{x-t}\sin\frac{s^2}{4}ds\right)\left(\int_0^{x+t}\cos\frac{s^2}{4}ds\right) - \frac{1}{4}\left(\int_0^{x-t}\cos\frac{s^2}{4}ds\right)\left(\int_0^{x+t}\sin\frac{s^2}{4}ds\right).$$

Não era necessário identificar essas integrais, mas elas são conhecidas, são as chamadas integrais seno e cosseno de Fresnel

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos t^2 dt,$$

em termos das quais a solução particular fica

$$h(x,t) = S\left(\frac{x-t}{2}\right)C\left(\frac{x+t}{2}\right) - C\left(\frac{x-t}{2}\right)S\left(\frac{x+t}{2}\right).$$