

MS211 - Cursão - 2007

Segundo Exercício Programa

WarGames

Resumo

Neste segundo EP¹, espera-se que o método de Newton-Rapson seja implementado para a solução das equações transcendentais que eventualmente surjam nas análises. Os conceitos físicos envolvidos são simples: trata-se do movimento balístico com resistência do ar linear. Os interessados no assunto podem consultar qualquer livro de Física Básica. Os fatos narrados aqui são ficção. Qualquer semelhança com a realidade será mera coincidência.

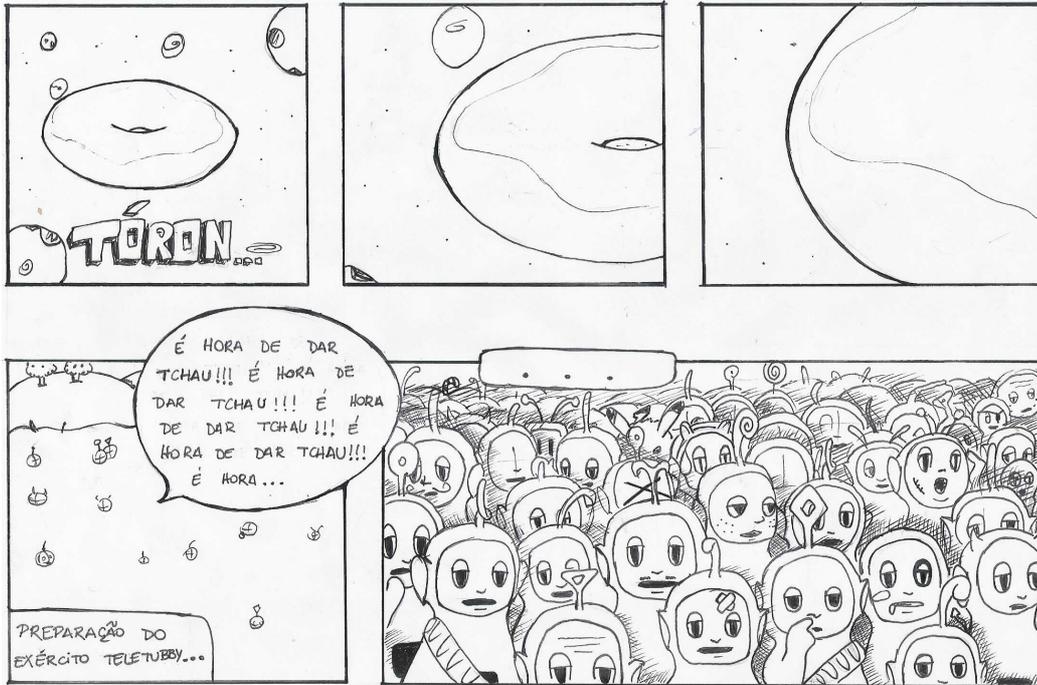
1 O terrível ataque dos Teletubbies

Os tempos de paz já eram passado. Desde o final da Copa Galáctica de Quadribol, a República vivia com tensão a iminência de um ataque do temido exército de Teletubbies do Planeta Tóron. Todas as tentativas de solução diplomática da crise causada pelo sequestro da regente de Tóron haviam fracassado. A população de Tóron, esquecida há tempo pelo Senado, nutria uma certa revolta contra o Governo Galático Central. Mesmo os movimentos tradicionalmente pacíficos, como a OGNG (Organização Galáctica não-Governamental) *Tóron Existe*, apoiavam o conflito armado. Um ataque parecia inevitável e o Senado decide preparar um programa de defesa automático, contando com o apoio dos cientistas do Instituto OASRUC, que fora outrora um dos orgulhos da República.

Sabe-se que o ataque virá do espaço. Será um bombardeio por projéteis balísticos². Deve-se proteger uma área correspondente a um círculo de 15 km

¹Assim como no caso do EP1, isto é um arquivo PDF com hipertextos. Você pode imprimi-lo normalmente, mas para ter acesso aos links espalhados pelo texto você precisa de um computador conectado a Internet e com o Acrobat Reader atualizado.

²Projéteis sem motor, que se movem simplesmente pela ação da gravidade e da resistência do ar. Mais informações, aqui.



de raio, dentro do qual estão os principais edifícios e centros de comando da República. A defesa, veja Fig. 1, conta com um sistema de radar e com quatro lança-mísseis em posições fixas. O programa de defesa automático deve, a partir das informações obtidas pelo radar,

1. determinar o tipo de projétil;
2. determinar o ponto de impacto no solo;
3. em função do tipo de projétil e do ponto de impacto, disparar, se possível, um míssil de interceptação.

Pode-se desprezar o tempo necessário para as trocas de informações no problema.

2 Trajetórias

Os cientistas da República há muito dominavam a Mecânica. Conheciam com precisão os detalhes das trajetórias de diversos projéteis. Sabiam, em

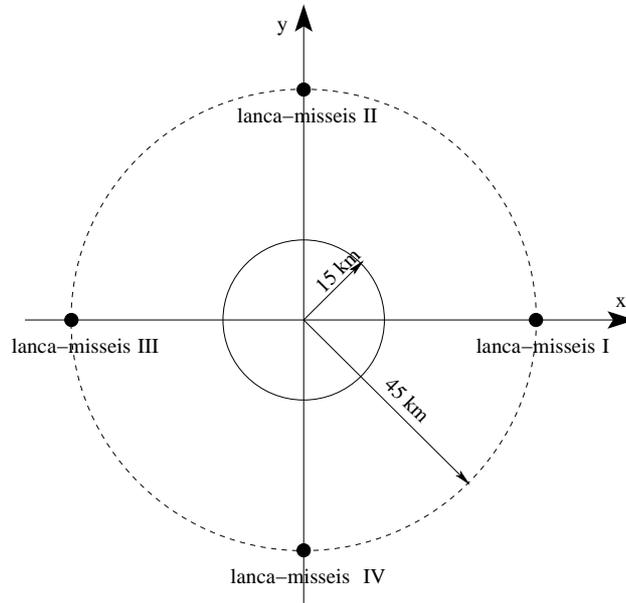


Figura 1: Disposição da região protegida e dos lança-mísseis fixos. Considere o terreno como perfeitamente plano.

particular, que a trajetória de projéteis balísticos em R^3 pode ser descrita pelas equações diferenciais

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} + b\dot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} + b\dot{z} &= -mg, \end{aligned} \tag{1}$$

sendo m a massa do projétil, b uma constante que mede a resistência do ar³, e g a aceleração da gravidade, a qual vale $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Com a inestimável contribuição do Prof. Zonito, os cientistas do OASRUC puderam integrar as equações (1), obtendo

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 e^{-\frac{b}{m}t} \rightarrow x(t) = x_0 + \frac{m\dot{x}_0}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

³ Aparentemente, os cientistas da República não sabem que, para grandes velocidades, a força de resistência do ar não é linear na velocidade. Mais comentários, nas aulas exploratórias.

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = \dot{y}_0 e^{-\frac{b}{m}t} &\rightarrow y(t) = y_0 + \frac{m\dot{y}_0}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \\ \dot{z}(t) = \left(\dot{z}_0 + \frac{gm}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{gm}{b} &\rightarrow z(t) = z_0 - \frac{gm}{b}t + \frac{m}{b} \left(\dot{z}_0 + \frac{gm}{b}\right) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

sendo (x_0, y_0, z_0) e $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, respectivamente, a posição e a velocidade inicial ($t = 0$) do projétil.

Já os mísseis de interceptação são motorizados, suas trajetórias são bem descritas por linhas retas percorridas com aceleração a constante. Para os lança-mísseis do sistema de defesa, $\mu a = 50 \text{ m/s}^2$, com $\mu = (m_f + m_e)/m_f$, sendo m_e a massa dos explosivos e $m_f = 200 \text{ kg}$ a massa do foguete vazio. A quantidade de explosivos deverá se escolhida de acordo com o tipo do projétil-alvo. Os possíveis valores de m_e são 100, 200, e 300 kg. Os motores dos misseis de interceptação funcionam por até 45 segundos. Passado este tempo, se não houver a interceptação, o míssil é destruído por segurança.

3 Radar

Assim que o projétil é detectado, o radar informa imediatamente os seguintes dados:

(x_0, y_0, z_0) : As três coordenadas, em metros, do ponto em que foi feita a detecção.

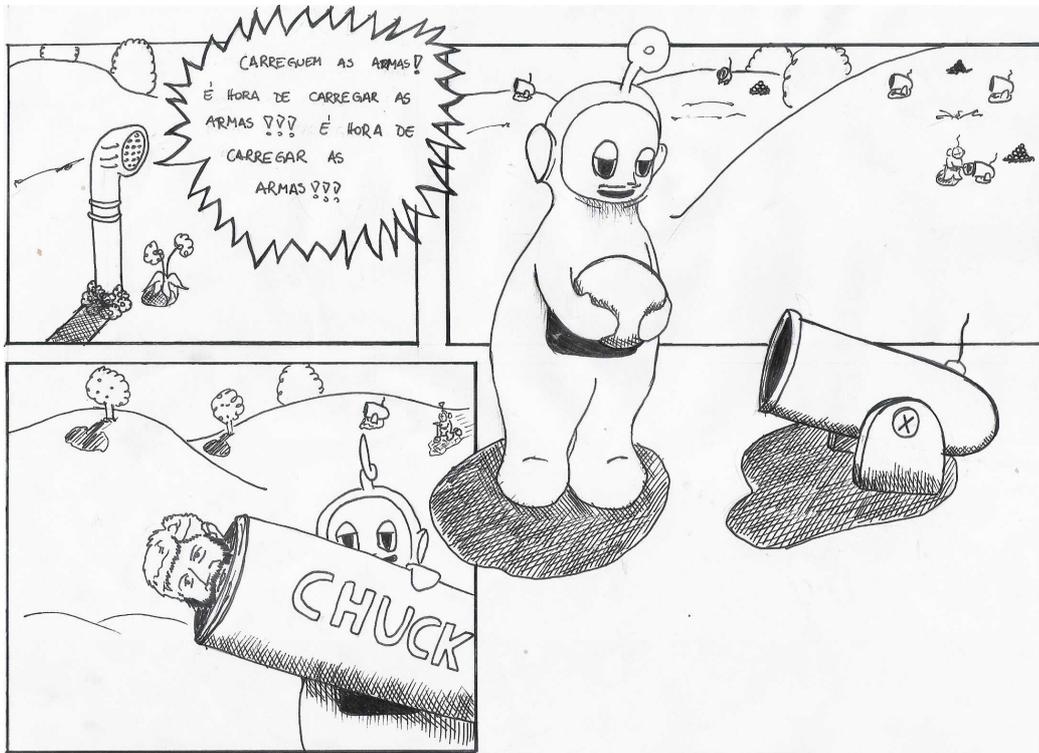
$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$: As três componentes da velocidade instantânea, em metros por segundo, do projétil no momento da detecção.

$(\dot{x}(-1), \dot{y}(-1), \dot{z}(-1))$: As três componentes da velocidade instantânea, em metros por segundo, do projétil um segundo antes do momento da detecção.

A detecção de um projétil pelo sistema de radar sincroniza o instante $t = 0$ de todos os relógios do sistema e inicia automaticamente o programa de defesa.

4 Interceptação

Devido ao tempo máximo de 45 segundos de funcionamento de seus motores, os mísseis de interceptação possuem uma região de alcance máximo. Caso o projétil penetre nesta região, ele poderá ser interceptado e destruído. Por razões de segurança, contudo, a interceptação só será viável se esta ocorrer a



uma distância mínima, que depende do tipo de projétil, do território protegido. Define-se a distância entre o ponto de interceptação e o território protegido da maneira habitual, como a *menor* distância entre o ponto de interceptação e os pontos do território protegido.

5 O programa de defesa automático

O programa deve, inicialmente, ler os números fornecidos pelo radar para cada projétil detectado. Pode-se supor que os números estão registrados no arquivo `radar.dat`. De fato, no repositório do curso há um arquivo com esse nome, contendo os dados de 12 projéteis detectados pelo sistema de radar. Para cada projétil detectado, as tarefas do programa serão:

1. Identificação do projétil, feita pela razão b/m , obtida a partir das equações (2). Dos dados do radar, pode-se determinar diretamente (x_0, y_0, z_0) e $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$. A partir de $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ e $(\dot{x}(-1), \dot{y}(-1), \dot{z}(-1))$, usando-se (2), pode-se também determinar a razão b/m . Deve-se usar

| Projétil | $b/m(\text{s}^{-1})$ | c (kg) | d (m) |
|--------------|----------------------|----------|---------|
| Incendiários | 0.008 a 0.012 | 100 | 1000 |
| Blockbuster | 0.013 a 0.017 | 200 | 1500 |
| EarthQuake | 0.018 a 0.022 | 200 | 1500 |
| MOAB | 0.023 a 0.027 | 300 | 2500 |
| Chuck Norris | > 0.028 | 300 | 5000 |

Tabela 1: Dados sobre os armamentos de Tóron. A quantidade c é a carga de explosivo necessária para interceptar o projétil, e d a distância mínima que deve ser respeitada da zona protegida.

o seguinte procedimento: a razão b/m será a média simples do valor obtido comparando-se cada componente da velocidade para $t = 0$ e $t = -1$ s.

2. Com todos os dados iniciais da trajetória balística e a razão b/m , determinar o tempo total de vôo e o ponto de colisão com o solo ($z = 0$). Se o ponto de colisão estiver na área protegida, um aviso de alerta contendo todos os dados conhecidos sobre o projétil deve ser emitido. Os dados sobre os armamentos de Tóron obtidos pelos serviços de espionagem da República estão na Tabela 1.
3. Caso o ponto de colisão esteja dentro da área protegida, deve-se selecionar o tipo de míssil para interceptação de acordo com a tabela I e determinar se o projétil penetrará em alguma das áreas de alcance dos mísseis, sendo t_e e t_s os instantes de entrada e de saída, respectivamente, da região de alcance.
4. Caso um projétil esteja em rota de colisão com a área protegida, deve-se tentar o disparo de um míssil de interceptação. Caso a interceptação seja possível, o programa deve informar:
 - (a) O lança-mísseis usado, o instante de lançamento e a direção em que o míssil foi lançado,
 - (b) O ponto e o tempo de interceptação, assim como a distância da área protegida.

Caso não seja possível a interceptação, outro alerta contendo todos os dados sobre o projétil deve ser emitido. Caso trate-se de uma bomba



Chuck Norris, a mensagem dever conter também a informação *Game Over*.

Agradecimentos

Olívia, Artur, Vitor Lécio, Alírio, 9 e Coldplay.