Introducció a la Geometria

Gabriel Cardona Juanals

29 d'abril de 2004

Tema 1

Triangles

En aquest tema estudiarem bàsicament els triangles, relacions entre ells i punts distingits.

Suposarem que tots tenim clars els conceptes de punt, recta, semirecta i segment, així com que entenem que són les traslacions, les rotacions i les reflexions. Donar definicions precises de tots aquests conceptes ens portaria a estudiar a fons l'axiomàtica de Hilbert. El nostre objectiu és arribar lluny més que no pas justificar aquests conceptes "primitius".

1.1 Propietats bàsiques

Congruència d'objectes. Siguin AB i $A'B'$ segments. Direm que són *congruents* si podem transformar l'un amb l'altre fent servir traslacions i rotacions. Això és equivalent a dir que la longitud dels segments és la mateixa; de fet, podem pensar les distàncies com classes d'equivalència respecte la relació de congruència. Sovint simplement direm que els segments són iguals, en el benentès que no volem dir $A = A'$ i $B = B'$ sinó que ens referim a aquesta relació. Notarem la longitud de AB com (AB).

Un angle està determinat per dues semirectes amb extrem comú (podeu prendre, si voleu, això com a definició d'angle). Dos angles direm que són congruents si una mateixa combinació de traslacions i rotacions transforma les semirectes que defineixen un angle en les semirectes que defineixen l'altre.

Si $\triangle ABC$ és un triangle, direm $\angle BAC$ l'angle determinat per les dues semirectes amb origen a A i que, passant pels punts B i C s'extenen "fins a l'infinit". Quan no hagi possibilitat de confusió notarem per A l'angle $\angle BAC$, en el benentés que no estem parlant d'un punt sino d'un angle. De la mateixa manera, notarem per a (resp. b, c) el costat oposat al vertex A (resp. B, C); sovint farem servir la mateixa lletra per indicar la seva longitud (dit d'altra manera, la seva classe mòdul congruència).

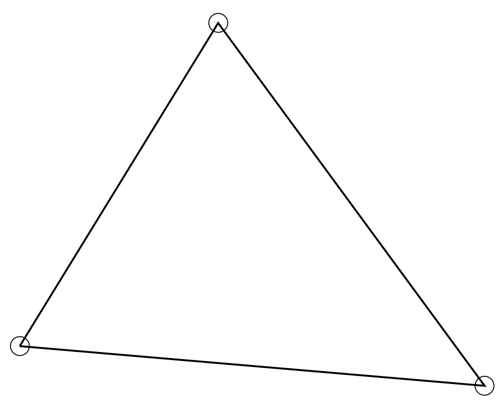
Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ triangles. Direm que són congruents quan els seus costats i angles són congruents dos a dos. Això és equivalent a dir que podem transformar un triangle en l'altre fent servir traslacions, rotacions i reflexions.

Criteris de congruència. Els següents criteris ens asseguren que dos triangles són congruents.

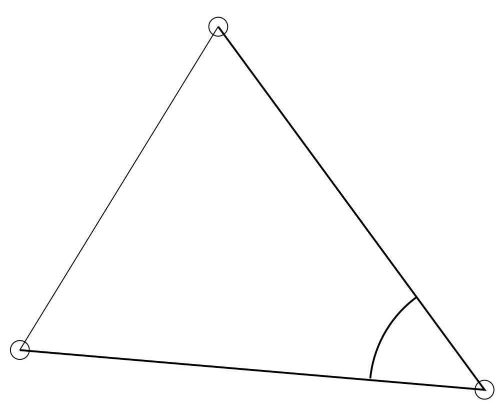
CCC Costat-Costat-Costat: Si dos triangles tenen congruents els tres costats, aleshores són congruents.

CAC Costat-Angle-Costat: Si dos triangles tenen congruents dos costats i l'angle que determinen, aleshores són congruents.

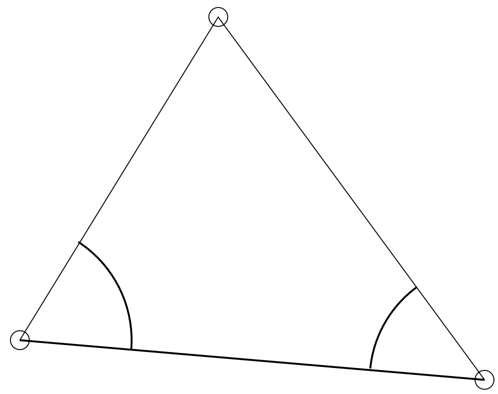
ACA Angle-Costat-Angle: Si dos triangles tenen congruents un costat i els angles adjacents, aleshores són congruents.



Criteri CCC



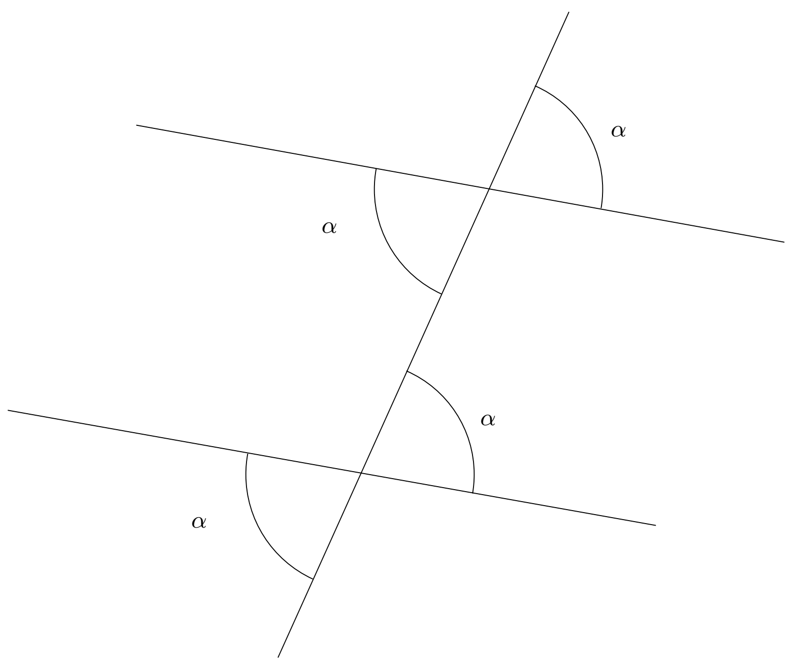
Criteri CAC



Criteri ACA

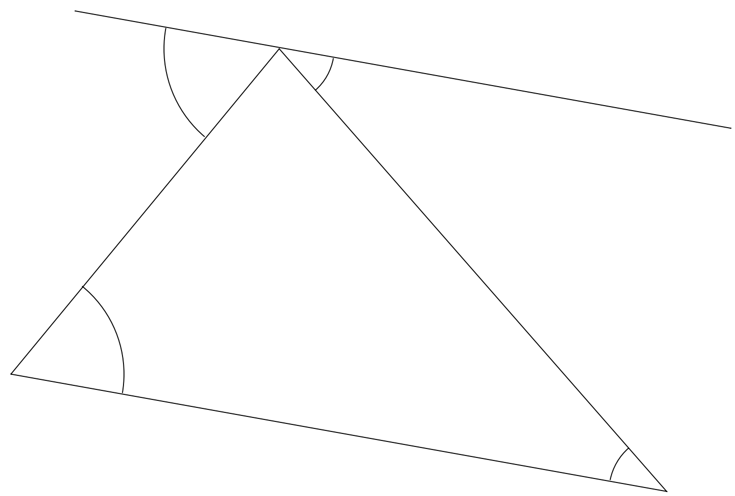
Exercici 1.1.1: Proveu que els tres criteris són equivalents.

Angles d'un triangle. Recordem les igualtats entre angles que es resumeixen al diagrama següent.



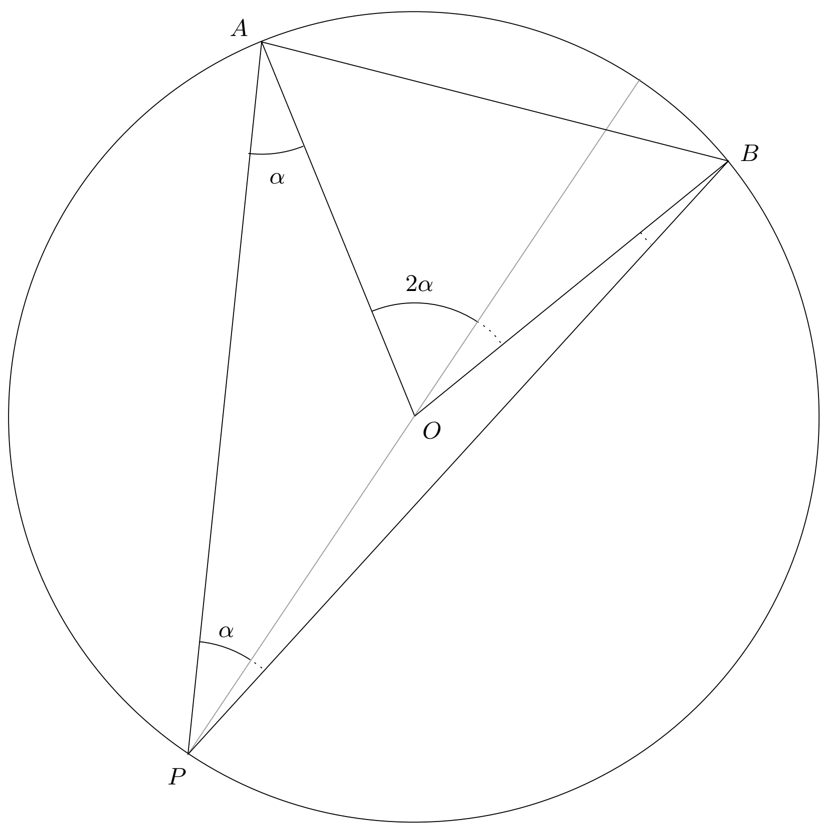
Igualtat d'angles

A partir d'aquestes igualtats és immediat veure que els angles d'un triangle sumen dos rectes (o un angle pla, o 180º, o π radians).



Arc capaç i conseqüències. L'angle sota el qual es veu una corda des d'un punt de la circumferència és igual a la meitat de l'angle sota el qual des del centre.

Exercici 1.1.2: Proveu aquest resultat. Indicació:



En particular, l'angle sota el qual es veu la corda des d'un punt de l'arc no depèn del punt de l'arc escollit.

Exercici 1.1.3: La figura anterior correspon al cas que els extrems de la corda es troben cadascun en un dels dos semicercles en que divideix la circumferència el diàmetre que passa pel punt P. Proveu que el cas que en l'altra cas es segueix complint la propietat.

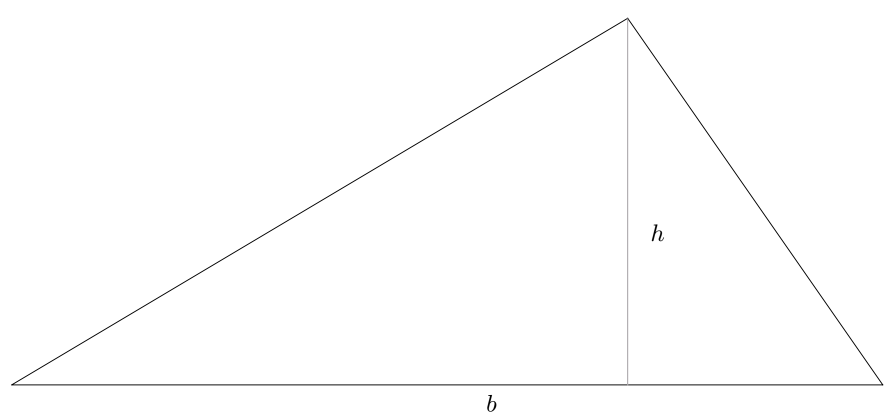
Sigui α un angle i AB un segment. Els resultats anteriors proven que el lloc geomètric dels punts des dels quals es veu el segment AB sota un angle α és un arc de circumferència (de fet, dos arcs de circumferència) que passa per A i B; per tal de determinar-lo, n'hi ha prou en determinar el centre.

Exercici 1.1.4: Doneu una manera constructiva de trobar aquest centre. Indicació: ha d'estar sobre la mediatriu del segment AB (Perquè?) i des d'ell s'ha de veure AB sota un angle igual a 2α.

Àrea i relacions. Farem servir la notació (ABC) per indicar l'àrea del triangle $\triangle ABC$; anàlogament, $(ABCD)$ indicarà l'àrea del quadrilàter $\square ABCD$.

Tots coneixem la fórmula que dóna l'àrea d'un triangle en funció de la base i l'alçada:

$$(ABC) = \frac{b \cdot h}{2}.$$



De fet, per tal de deduir aquesta fórmula tal com ho fa Euclides (per exemple) es fan servir resultats parcials que sovint poden ser útils:

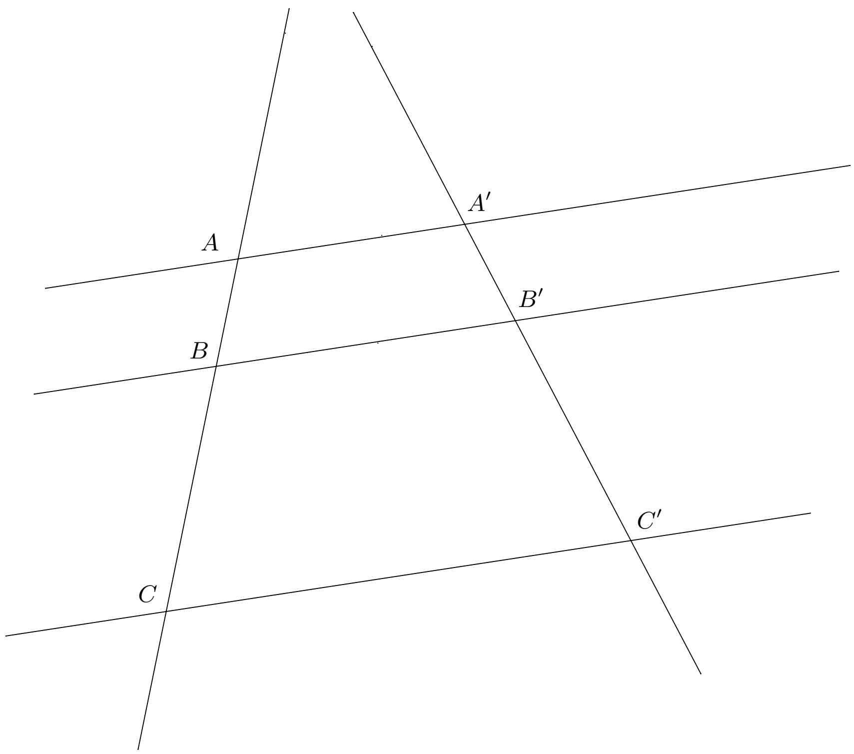
1. Si dos paral·lelograms comparteixen un costat i els respectius costats oposats estan sobre una mateixa recta, aleshores aquests tenen igual àrea.

2. Si dos triangles comparteixen un costat i la recta que passa pels respectius vèrtexos oposats és paral·lela a aquest costat, aleshores els dos triangles tenen igual àrea.

3. Si dos triangles comparteixen un vèrtex i els respectius costats oposats es troben sobre una mateixa recta, aleshores la raó entre les àreas és igual a la raó entre els costats considerats.

Semblança de triangles. Dos triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ es diuen semblants si es pot transformar l'un en l'altre fent servir traslacions, rotacions, reflexions i dilatacions. Això és equivalent a dir que tenen els seus angles congruents (iguals, si preferiu) o també que la raó entre costats és igual.

L'equivalència d'aquestes dues darreres condicions és equivalent al teorema de Thales: Quan tres o més paral·leles són atravesades per dos transversals, els segments que s'obtenen en una d'aquestes són proporcionals als respectius segments de l'altra.



$$\frac{(AB)}{(BC)} = \frac{(A'B')}{(B'C')}$$

El següent fragment correspon a la cançó "Teorema de Thales" del grup argentí "Les Luthiers":

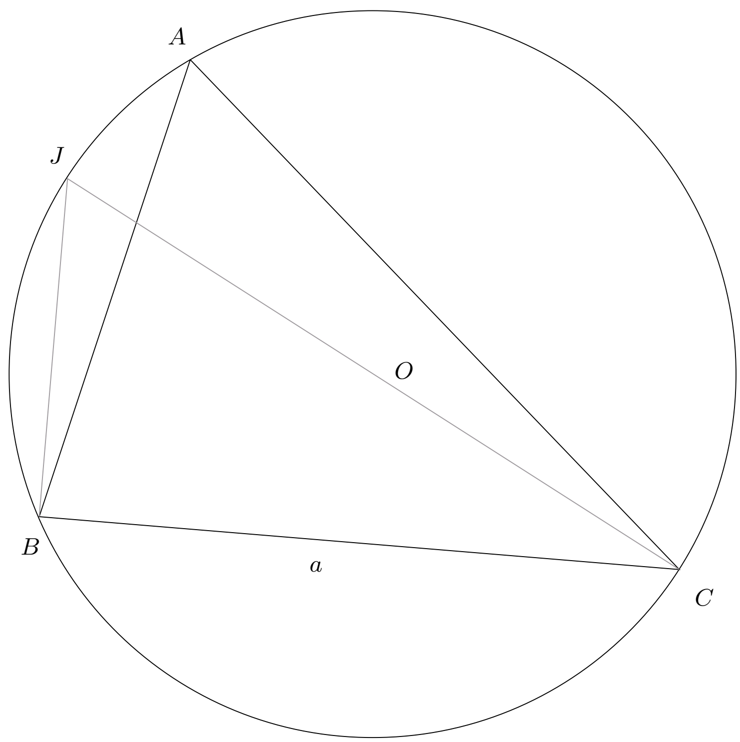
> Johan Sebastian Mastropiero dedicó su Divertimento Matemático Opus 48 "El Teorema de Thales" a la condesa Shad-Shad, con

quien viviera un apasionado romance varias veces, en una carta en la que le dice: “Condesa, nuestro amor se rige por el teorema de Thales. Cuando estamos horizontales y paralelos, las transversales de la pasión nos atraviesan y nuestros segmentos correspondientes resultan maravillosamente proporcionales.”

1.2 El teorema dels sinus (versió deluxe)

Sigui γ una circumferència de centre P i radi R, A, B, C tres punts d'ella i considerem el triangle $\triangle ABC$. En aquesta situació es diu que γ és el circumcercle de $\triangle ABC$ o bé que $\triangle ABC$ està inscrit en γ; el punt P s'anomena el circumcentre del triangle i el radi R el seu circumradi. [Nota: Més endavant veurem que el triangle determina el seu circumcentre i circumcercle].

Considerem la figura següent:



Aquí el punt J és el diametralment oposat a C, de manera que el triangle $\triangle JBC$ és rectangle (perquè?) i tenim

$$\sin A = \sin J = \frac{a}{2R},$$

és a dir,

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

El mateix raonament aplicat als altres angles ens dóna les igualtats

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

Teorema 1.2.1: *En un triangle $\triangle ABC$ amb circumradi R es compleix que*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

Exercici 1.2.1: La construcció correspon al cas que el triangle és acutangle; adapteu el raonament per tal de provar que el resultat segueix sent cert en els restants casos. Observació: Haureu de considerar que el triangle es troba en un semicercle; també us caldrà provar que si un quadrilàter es troba inscrit en una circumferència, aleshores angles oposats sumen dos rectes.

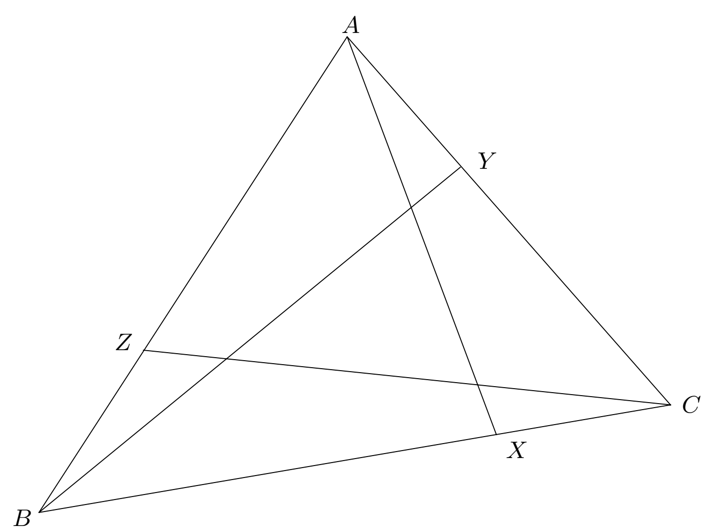
Exercici 1.2.2: Enuncieu i proveu el teorema del cosinus.

Exercici 1.2.3: Amb les notacions d'aquesta secció proveu que

$$(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

1.3 El teorema de Ceva

Els segments que uneixen un vertex d'un triangle amb un punt del segment oposat s'anomenen cevianes. En aquesta secció considerarem triangles $\triangle ABC$ i cevianes AX, BY i CZ com a la figura següent.

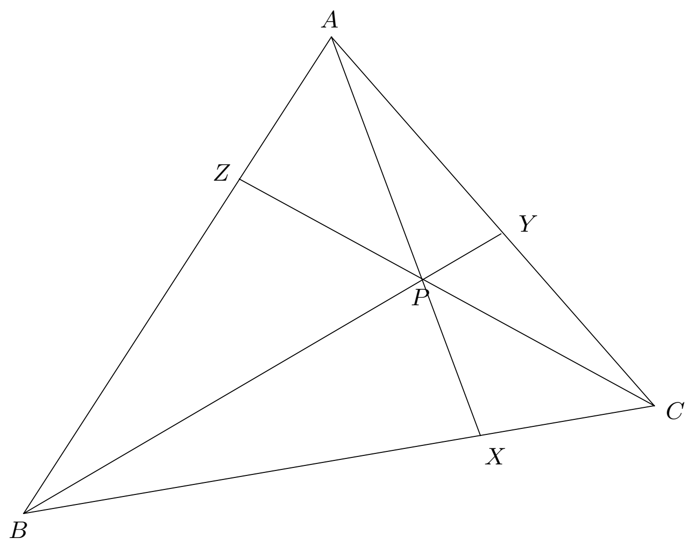


El següent teorema és degut al matemàtic italià del segle XVII Giovanni Ceva (Suposo que haureu adivinat que el nom ceviana prové del nom d'aquest matemàtic).

Teorema 1.3.1: *Amb les notacions anteriors, si les cevianes AX, BY i CZ són concurrents (és a dir, tenen un punt en comú), aleshores*

$$\frac{(BX)}{(XC)}\frac{(CY)}{(YA)}\frac{(AZ)}{(ZB)} = 1.$$

Demostració. Considerem els triangles de la figura



Observem que es té la igualtat

$$\frac{(BX)}{(XC)} = \frac{(ABX)}{(ACX)},$$

deguda a que els triangles $\triangle PBX$ i $\triangle PCX$ tenen igual alçada i, per tant, la raó d'àrees és igual a la raó de les bases. El mateix argument ens dóna

$$\frac{(BX)}{(XC)} = \frac{(ABX)}{(ACX)} = \frac{(PBX)}{(PCX)} = \frac{(ABX) - (PBX)}{(ACX) - (PCX)} = \frac{(ABP)}{(ACP)}.$$

Anàlogament, per als restants vèrtexos tenim:

$$\frac{(CY)}{(YA)} = \frac{(BCP)}{(ABP)}, \qquad \frac{(AZ)}{(ZB)} = \frac{(ACP)}{(BCP)}.$$

Multiplicant les tres igualtats obtenim el resultat. $\square$

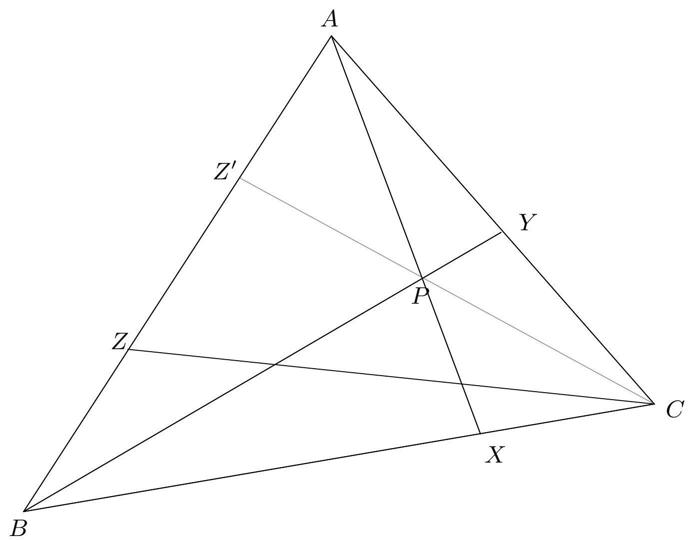
El recíproc d'aquest teorema també és cert:

Teorema 1.3.2: *Amb les notacions anteriors, si les cevianes compleixen que*

$$\frac{(BX)}{(XC)}\frac{(CY)}{(YA)}\frac{(AZ)}{(ZB)} = 1,$$

aleshores són concurrents.

Exercici 1.3.1: Proveu aquest recíproc. Podeu inspirar-vos en la figura següent.



Exercici 1.3.2: Proveu que les cevianes que passen per cada vèrtex i el punt mig del costat oposat són concurrents

Exercici 1.3.3: Proveu que si prenem les cevianes que són perpendiculars als costats oposats, aquestes són concurrents.

Exercici 1.3.4: Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dos triangles no congruents amb costats paral·lels dos a dos. Aleshores les rectes AA', BB' i CC' són concurrents.

1.4 Punts distingits

En aquesta secció estudiarem punts distingits associats a un triangle.

Circumcentre. Quan hem parlat del teorema dels sinus, hem considerat un triangle amb els vèrtexos sobre una circumferència donada. Si volem aplicar els resultats a un triangle qualsevol, necesitem veure que donat el triangle, podem trobar una circumferència circumscrita.

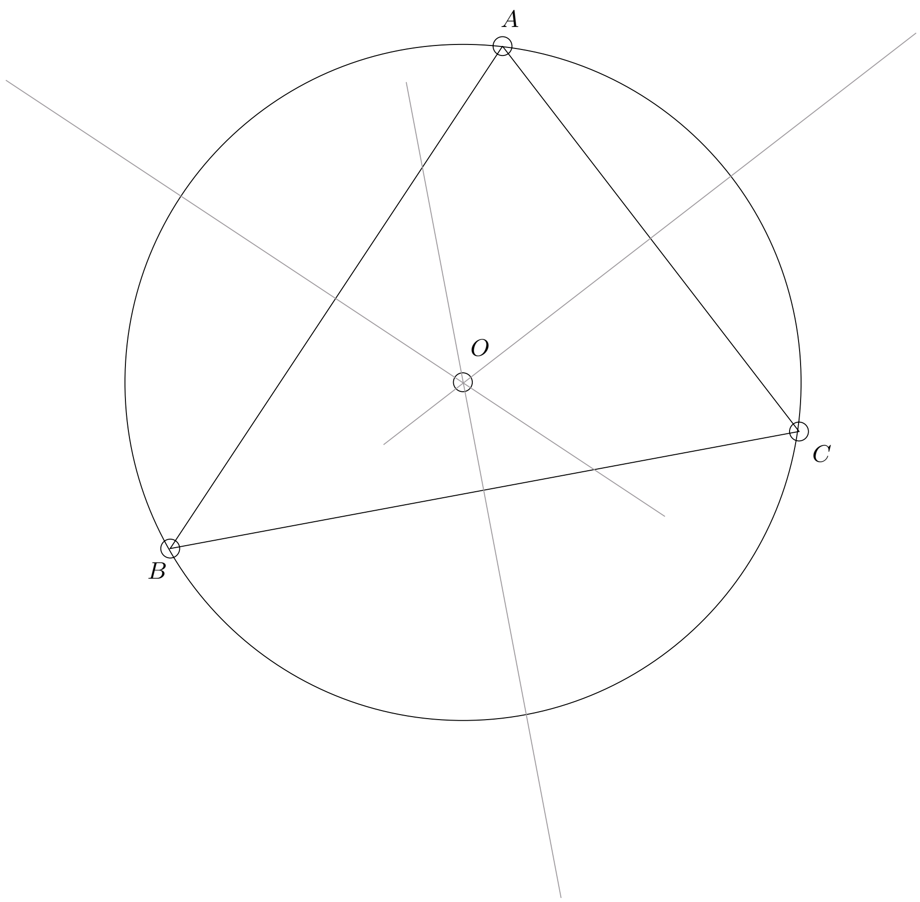
En primer lloc vegem que les mediatrius dels tres segments AB, BC i CA són concurrents: la mediatriu del segment BC és la perpendicular a aquest segment que passa per A', el punt mig de BC; dit d'altra manera, la mediatriu de BC és el lloc geomètric dels punts que equidisten de B i C. Anàlogament la mediatriu de AC és el lloc geomètric dels punts que equidisten de A i C;

aquestes dues mediatrius es tallen (Perquè?) en un punt O que, per definició compleix que

$$(OB) = (OC), \qquad (OA) = (OC).$$

Per tant, $(OA) = (OB)$ i O pertany a la mediatriu del segment AB i les tres mediatrius són concurrents.

Ara, la circumferència amb centre O que passa per A també passa per B i C i, per tant, circumscriu el triangle.

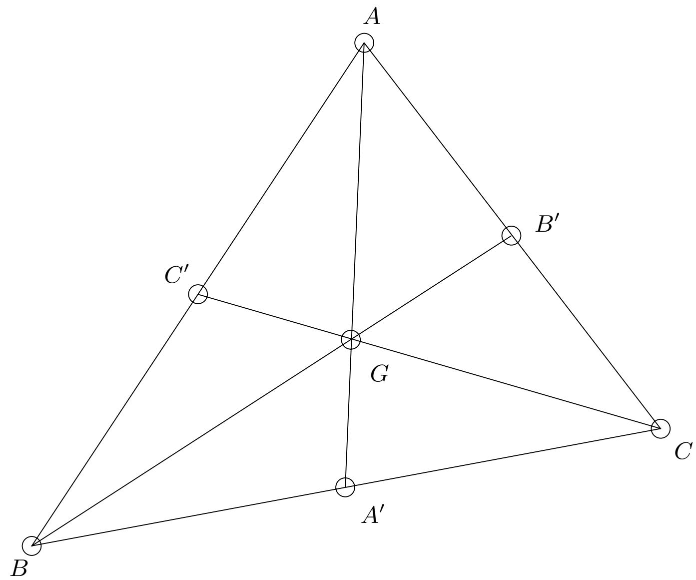


Prova-ho!

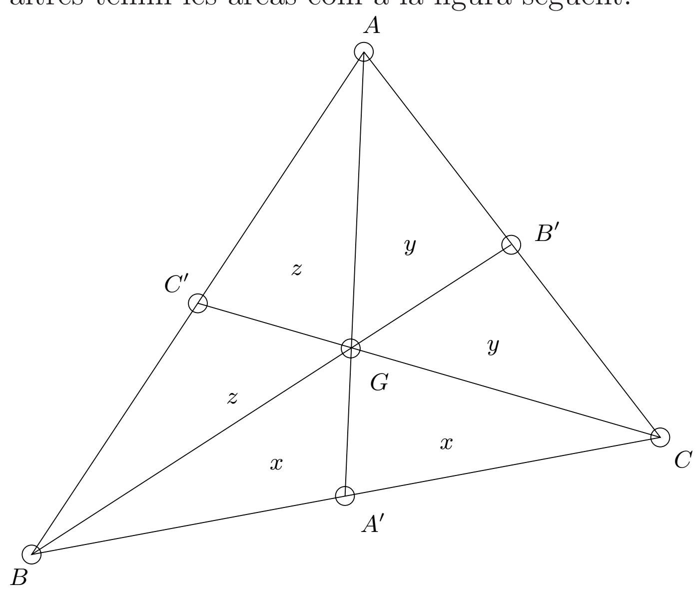
Exercici 1.4.1: Proveu que el circumcentre d'un triangle obtusangle es troba fora del triangle.

Centroide. Abans hem parlat de cevianes en general. La ceviana que uneix un vèrtex amb el punt mig del costat oposat s'anomena mediana.

El punt d'intersecció de les tres medianes (recordeu l'exercici 1.3.2) s'anomena el centroide del triangle, i té una interpretació física molt bonica: si construim el triangle amb un material homogeni, el centroide correspon al centre de gravetat de la figura.



Les medianes divideixen el triangle en sis triangles petits, tots ells d'igual àrea. En efecte, $(GBA') = (GA'C) = x$ (mateixa base i alçada) i anàlogament per als altres tenim les àreas com a la figura següent:



Prova-ho!

A més $(CAC') = (CBC')$ (mateix raonament) i per tant $2y + z = 2x + z$, d'on $x = z$; comparant (ACA') i (ABA') obtenim $y = z$. Per tant $x = y = z$ i els sis triangles tenen igual àrea.

Una altra propietat interessant és que qualsevol mediana divideix les altres dues en raó 2 : 1; és a dir:

Teorema 1.4.1: *El centroide triseca les medianes:*

$$(AG) = 2(GA'), \qquad (BG) = 2(GB'), \qquad (CG) = 2(GC').$$

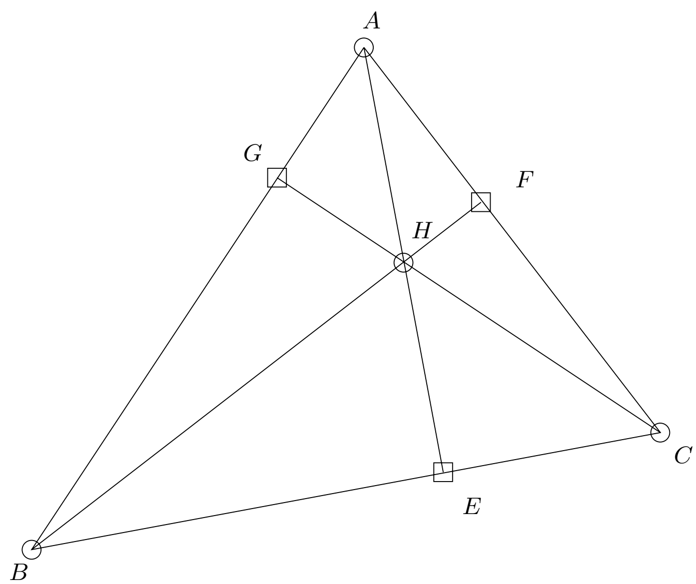
Exercici 1.4.2: Proveu aquest resultat comparant àreas de triangles.

Exercici 1.4.3: Trobeu la relació entra l'àrea d'un triangle i l'àrea del triangle que té costats congruents amb les medianes del triangle original.

Exercici 1.4.4: Un triangle que té dues medianes iguals (congruents) és isósceles.

Ortocentre. Un altre punt distingit sorgeix en considerar les cevianes que passant per un vèrtex són perpendiculars al costat oposat. En aquest cas, les cevianes prenen el nom d'altures.

Les altures d'un triangle són concurrents (recordeu l'exercici 1.3.3) en un punt que s'anomena l'ortocentre del triangle.



Prova-ho!

Exercici 1.4.5: Proveu que les altures es tallen en un punt sense fer servir el teorema de Ceva. Indicació: construiu un triangle de manera que les mediatrius dels costats siguin les altures del triangle original.

Els punts D, E i F s'anomenen els peus de les altures, i el triangle $\triangle DEF$ s'anomena el triangle òrtic de $\triangle ABC$.

Exercici 1.4.6: Proveu que un triangle obtusangle té l'ortocentre fora d'ell.

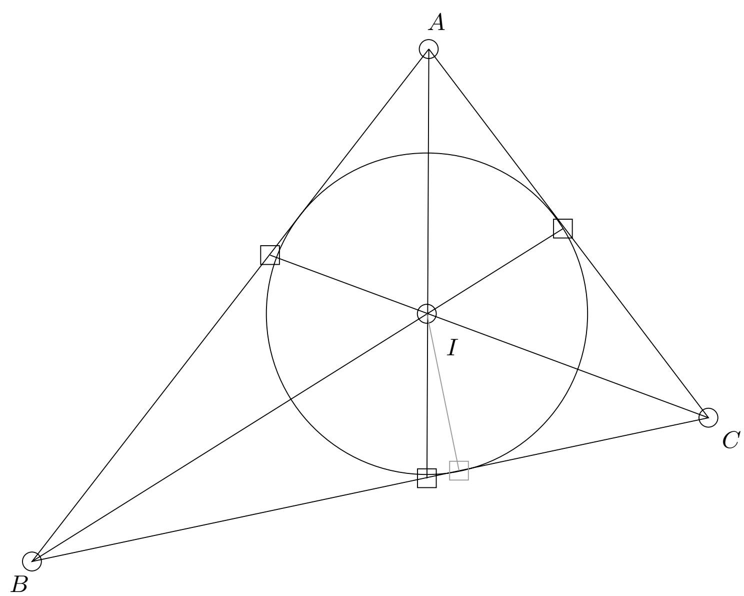
Exercici 1.4.7: Proveu que si un triangle té dues altures iguals, aleshores és isósceles.

Incentre. Per si no havíem considerat prou cevianes, aquí en tenim unes altres. La bisectriu d'un angle és la recta que el divideix en dos d'iguals; dit d'altra manera, la bisectriu és el lloc geomètric dels punts que equidisten de les dues semirectes que defineixen l'angle.

Si $\triangle ABC$ és un triangle, anomenarem segment bisectriu en A el segment que uneix A amb el punt d'intersecció de la (recta) bisectriu amb el costat BC.

Les tres bisectrius d'un triangle també son concurrents; en efecte, si I pertany a la intersecció de les bisectrius dels angles en A i B, aleshores $d(I, AB) = d(I, AC)$ i $d(I, BA) = d(I, BC)$, per tant $d(I, CA) = d(I, CB)$ i I pertany a la bisectriu de l'angle en C. Aquest punt s'anomena l'incentre de $\triangle ABC$.

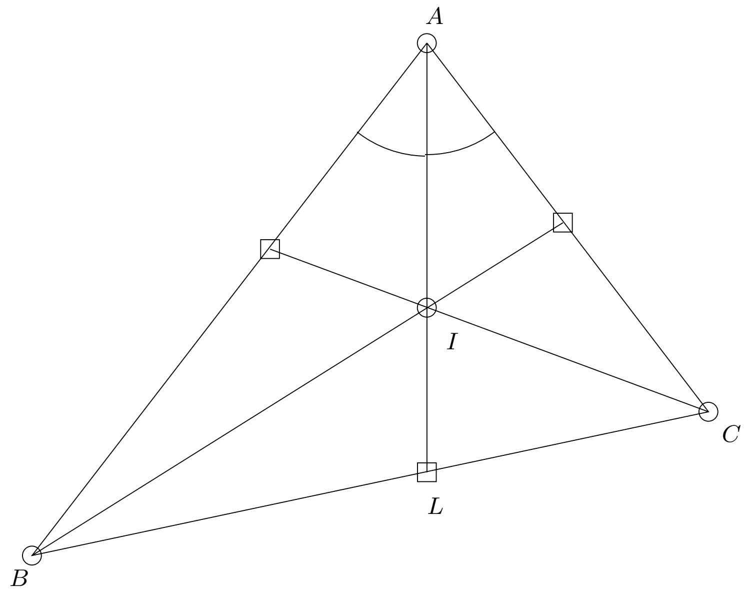
Així, hi ha una circumferència amb centre a I que és tangent al triangle, s'anomena la circumferència inscrita (o incercle) i el seu radi s'anomena l'inradi.



Prova-ho!

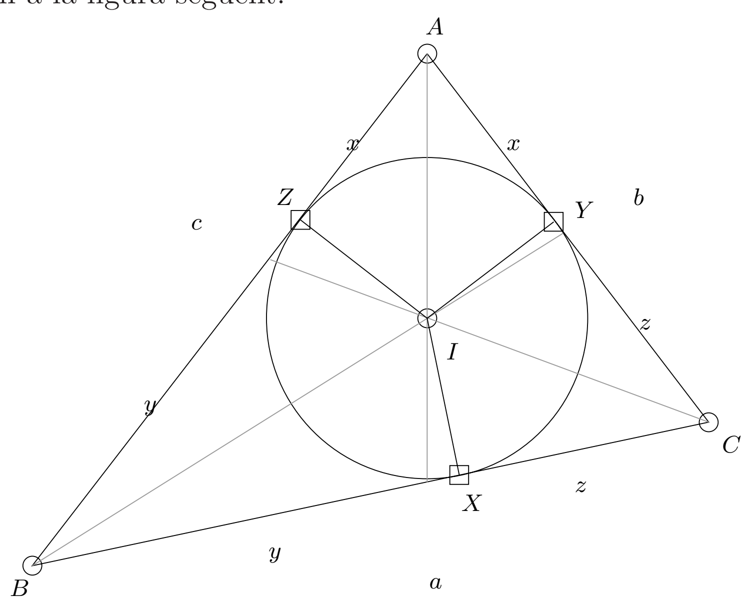
Les bisectrius també determinen relacions mètriques en els costats.

Exercici 1.4.8: Trobeu quina relació lliga (BL), (LC), $b = (AC)$ i $c = (AB)$. Indicació feu servir el teorema dels sinus en els triangles $\triangle ABL$ i $\triangle ACL$.



Prova-ho!

Sigui $\triangle ABC$ un triangle, i X, Y, Z els punts de tangencia amb el seu incercle com a la figura següent:



Els segments AZ i AY són congruents, ja que els triangles rectangles AZI i AYI són congruents (proveu-ho). El mateix passa amb els altres parells: $(BX) = (BZ)$ i $(CX) = (CY)$. Diguem $x = (AZ)$, $y = (BX)$, $z = (CY)$; $p = (AB)+(BC)+(CA)$ el perímetre del triangle i $s = p/2$ el semiperímetre. Aleshores $x + y = c$, $x + z = b$ i $y + z = a$. Aleshores

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = p, \qquad x + y + z = s$$

i es té

Teorema 1.4.2:

$$x = s - a, \qquad y = s - b, \qquad z = s - c.$$

A més, $(ABC) = (ABI) + (ACI) + (BCI)$; cadascun d'aquests darrers triangles té base igual al costat de $\triangle ABC$ corresponent i altura r. Per tant:

Teorema 1.4.3:

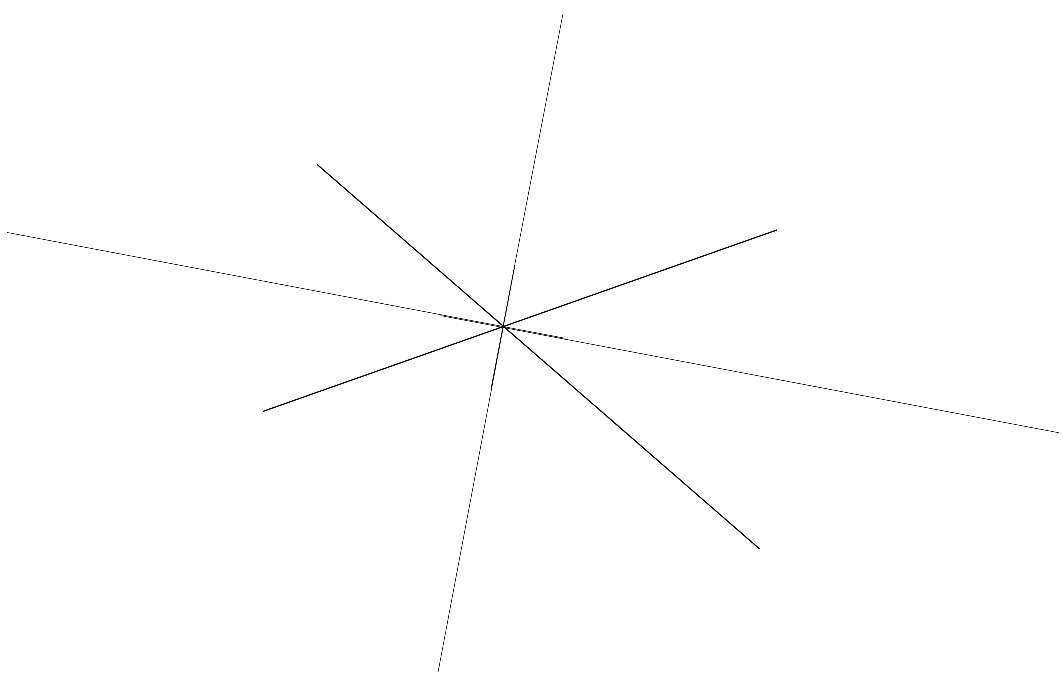
$$(ABC) = sr.$$

Demostració.

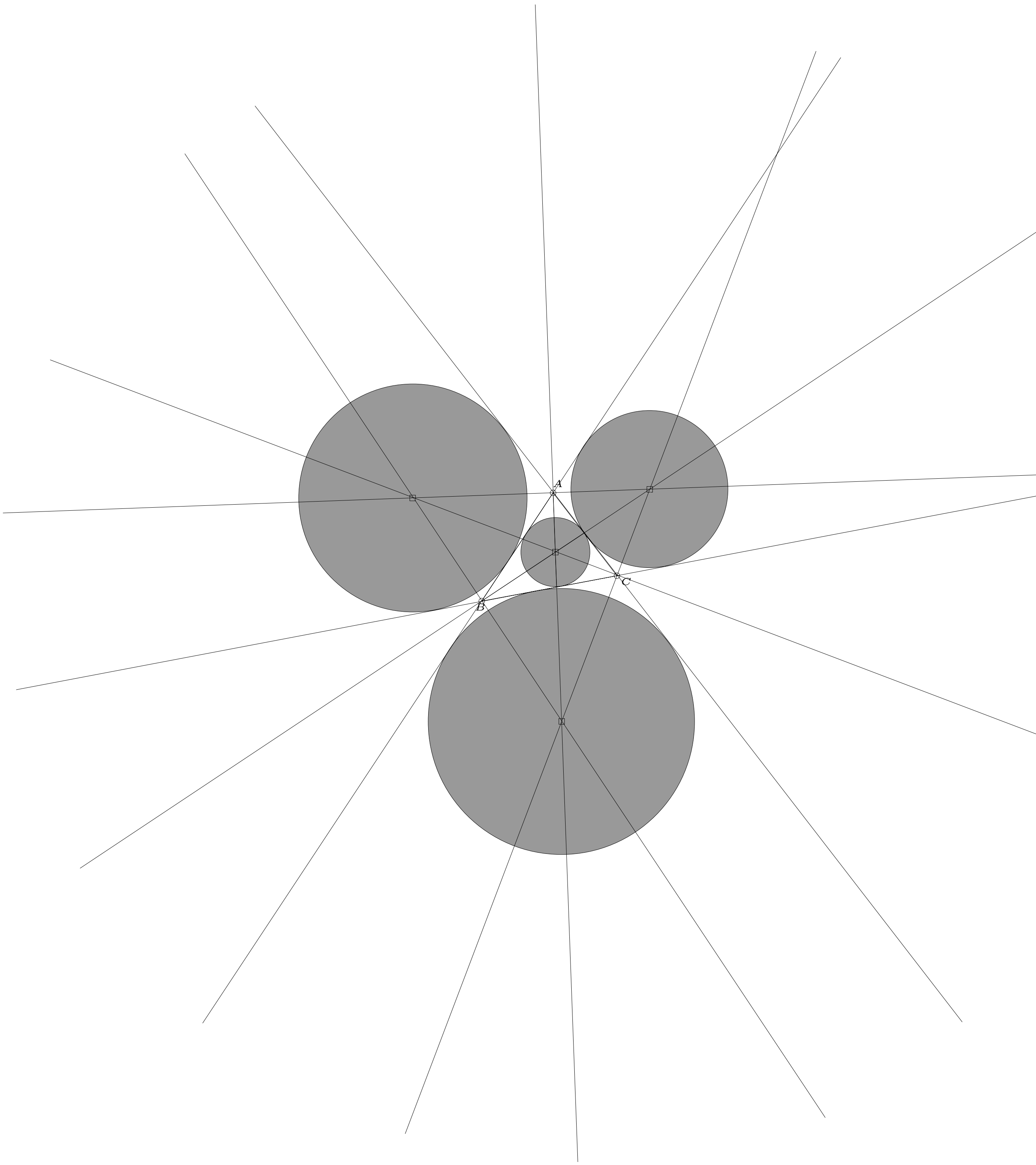
$$(ABC) = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = sr.$$

□

Si pensem en la definició que hem pres de bisectriu d'un angle, veurem que, de fet, no depèn de les semirectes que determinen l'angle sino tan sols de les rectes que les contenen. Per tant, de fet, tenim dues rectes mediatrius per a cada angle; la que hem considerat fins ara s'anomena la bisectriu interior, i l'altra la bisectriu exterior.



Si considerem per a cada vèrtex del triangle les bisectrius interiors i exteriors, el que obtenim és:


A
B
C

Exercici 1.4.9: Proveu que si tres circumferències amb centres A, B i C, respectivament, són tangents (externament) dos a dos, aleshores els seus radis són, respectivament, $s-a$, $s-b$ i $s-c$.

Exercici 1.4.10: Proveu que, amb les notacions anteriors,

$$abc = 4srR.$$

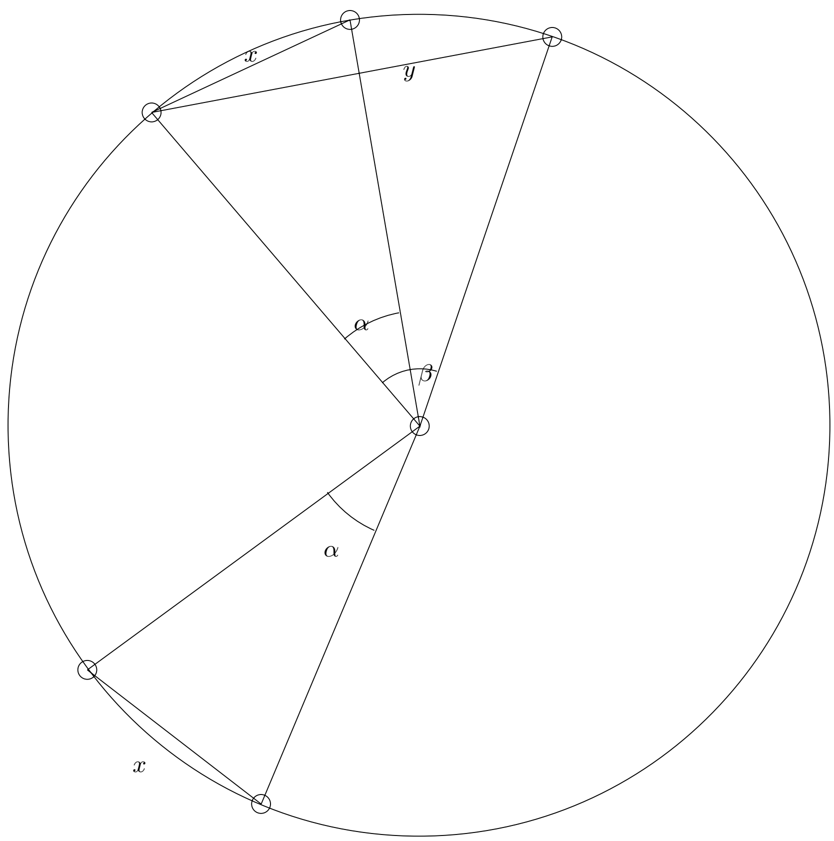
Exercici 1.4.11: Proveu que, amb les notacions de la figura anterior, les cevianes AX, BY i CZ són concurrents. El seu punt comú s'anomena els punt de Gergonne de $\triangle ABC$.

1.5 El teorema de Steiner-Lehmus

Abans hem vist que si un triangle té dues medianes o dues altures iguals, aleshores és isósceles. El mateix resultat per a segments bisectrius és, sorprenenment, molt més difícil de provar.

Lema 1.5.1: *Si des d'un punt d'una circumferència es veuen dues cordes sota angles aguts diferents, aleshores l'angle menor correspon a la corda menor.*

Demostració. Podem traduir la comparació d'angles des de punts de la circumferència a la comparació d'angles. A més, llevat de rotació, podem suposar que les cordes comparteixen un extrem.



Amb aquestes reduccions és evident que a corda menor li correspon angle menor, i viceversa. □

Lema 1.5.2: *Si un triangle té dos angles diferents, a l'angle menor li correspon el segment bisectriu major.*

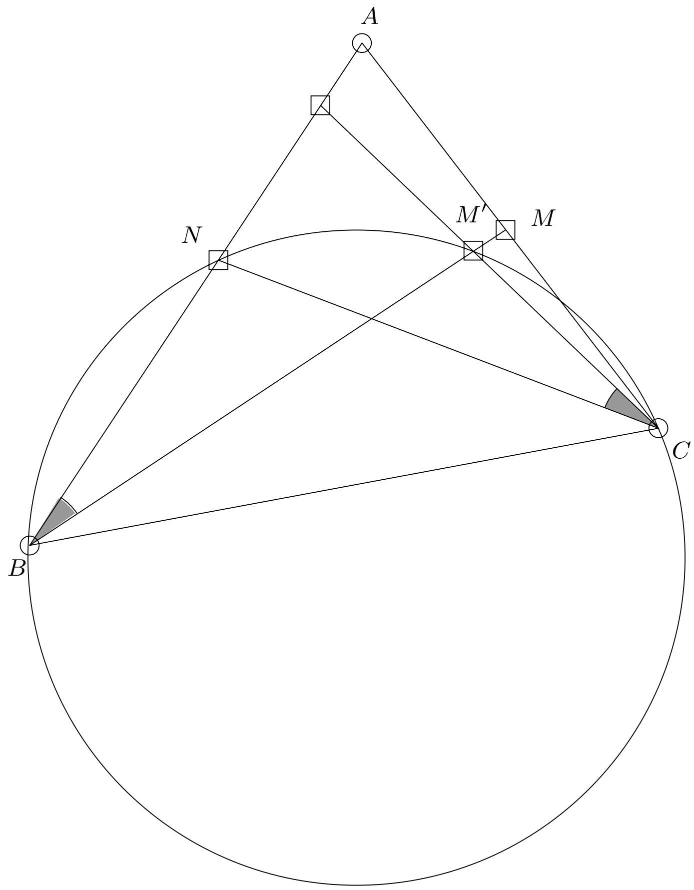
Demostració. Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb $\angle B < \angle C$; siguin BM i CN els segments bisectrius. Volem provar que $BM > CN$. Sigui M' sobre BM de manera que $\angle M'CN = \frac{1}{2}\angle B$. Donat que aquest és igual a $M'BN$, els quatre punts N, B, C, M' es troben sobre una mateixa circumferència. Donat que

$$\angle B < \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) < \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C),$$

es té

$$\angle CBN < \angle M'CB < 90^{\text{o}}.$$

Pel lema anterior, $(CN) < (M'B)$ i com que $(BM') < (BM)$, es té $(CN) < (BM)$.

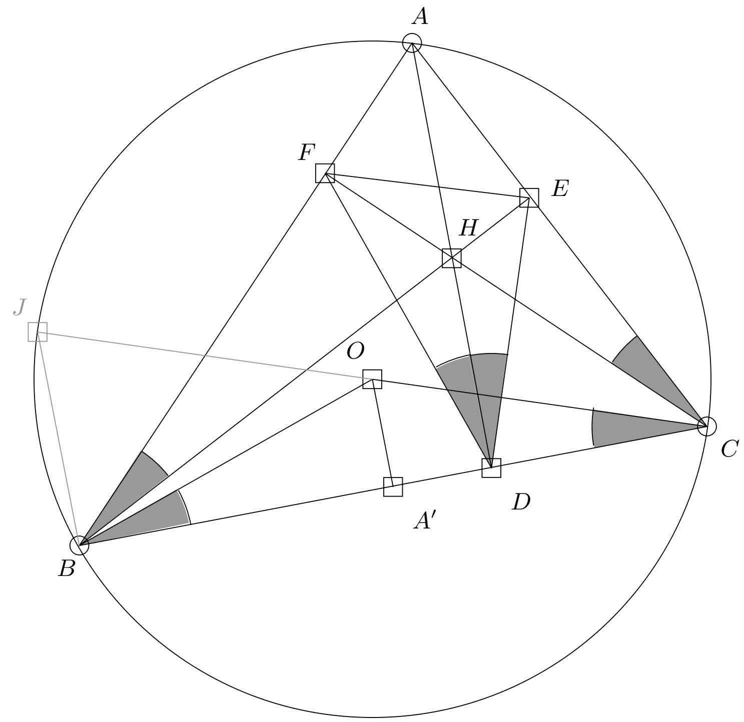


□

Teorema de Steiner-Lehmus. Si no és isósceles, els angles (suposem $\angle B$ i angle C) són diferents; suposem $\angle B < \angle C$. Pel lema anterior, $(BM) > (CN)$, que contradiu la hipòtesi. □

1.6 El triangle òrtic

Considerem la següent figura, on apareix un triangle acutangle, el seu circumcentre, el seu ortocentre i el triangle òrtic.



Prova-ho!

Els angles marcats són iguals entre ells i iguals a $90^{\text{o}} - \angle A$:

- Els triangles $OA'C$ i JBC són semblants, $\angle A'OC = \angle J = \angle A$; per tant $\angle A'CO = 90^{\text{o}} - \angle A$.

- Els triangles rectangles $\triangle ABE$ i $\triangle ACF$ comparteixen l'angle $\angle A$; per tant els altres angles són també iguals: $\angle ABE = \angle ACF = 90^{\text{o}} - \angle A$.

- El quadrilater $BDHF$ s'inscriu en una circumferència; en efecte, des de F i des de D es veu el segment BH sota un angle recte, per tant, la circumferència de diàmetre BH passa per F i D. El mateix raonament amb el diàmetre CH prova que $CDHE$ també s'inscriu en una circumferència. Per tant

  $$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle EBA = \angle ACF = \angle ECH = \angle EDH.$$

Per tant, DH biseca l'angle $\angle EDF$. Anàlogament, FH biseca $\angle DFE$ i EH biseca $\angle DEF$. Per tant, les altures AD, BE i CF són les bisectrius del triangle DEF. Així, el que es té és:

Teorema 1.6.1: *L'ortocentre d'un triangle acutangle coincideix amb l'incentre del seu triangle òrtic.*

Exercici 1.6.1: Proveu que FD és perpendicular a OB, DE a OC i EF a OA.

Exercici 1.6.2: Proveu les semblances de triangles:

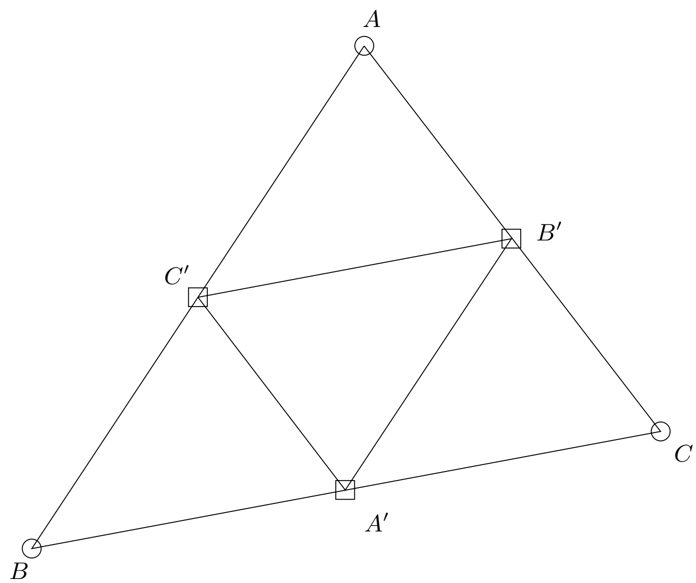
$$\triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC.$$

Exercici 1.6.3: Adapteu el resultat anterior al cas d'un triangle obtusangle.

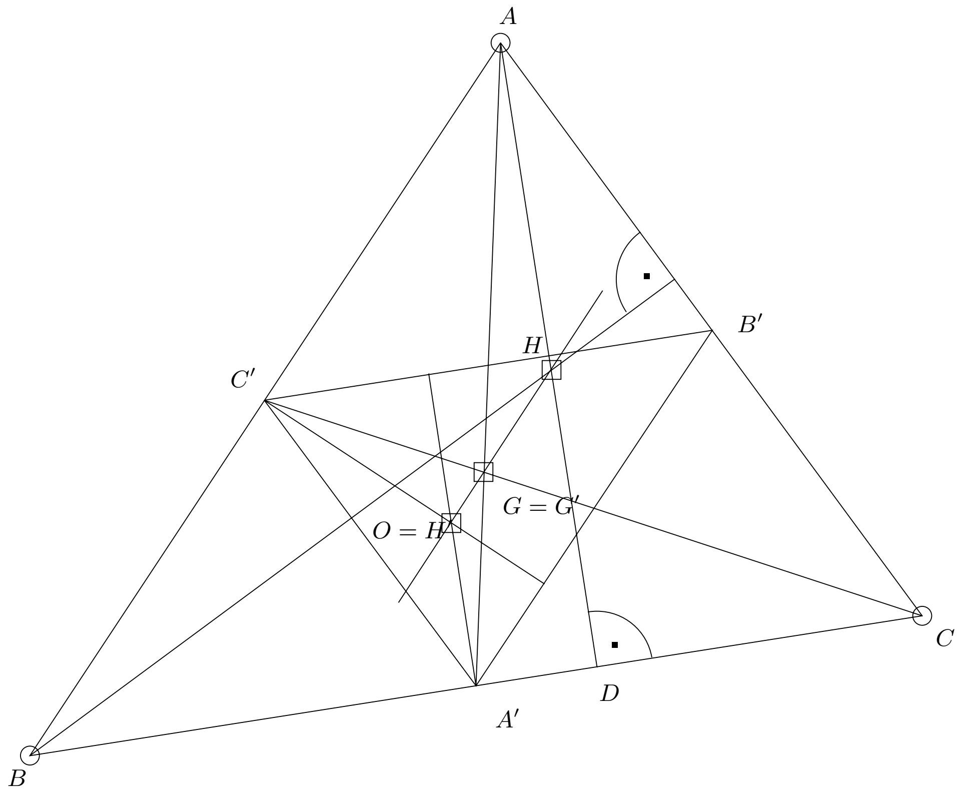
Exercici 1.6.4: Proveu que $\angle HAO = |\angle B - \angle C|$.

1.7 El triangle medial i la recta d'Euler

El triangle medial d'un triangle $\triangle ABC$ és el triangle que té per vèrtexos els punts mitjos dels costats del triangle original:



Considerem també el centroide G i l'ortocentre H de $\triangle ABC$ i el circumcentre O' de $\triangle A'B'C'$.



Prova-ho!

Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ són semblants ja que tenen costats paral·lels; a més, la raó entre costats corresponents és $2:1$.

Observem que les medianes en A i A' (en els triangles corresponents) es troben sobre una mateixa recta. En efecte, el segment AA' talla el costat $B'C'$ en el seu punt mig; això es pot veure, per exemple, notant que $AB'A'C'$ és un paral·lelogram. Per tant, $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ tenen igual centroide G.

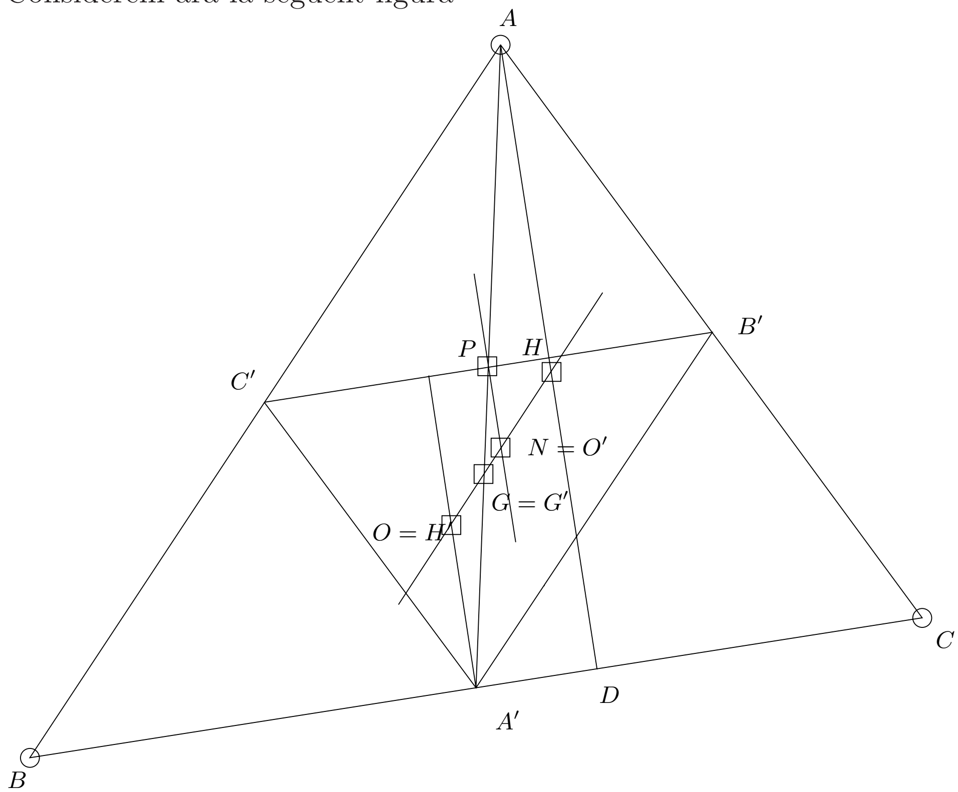
A més, les altures de $\triangle A'B'C'$ són perpendiculars als costats de $\triangle ABC$ i passen pels punts mitjos dels costat d'aquest. Per tant, l'ortocentre de $\triangle A'B'C'$ coincideix amb el cicumcentre de $\triangle ABC$.

Del fet que $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ són semblants amb raó 2, es dedueix que $(AH) = 2(A'H') = 2(A'O)$. A més, donat que el centroide divideix les medianes en dos segments amb raó de longituds $2:1$, es té que $(AG) = 2(GA') = 2(G'A')$. Amb això, i observant que les rectes OA' i HD són paral·leles, ja que són perpendiculars al costat BC. Per tant, els triangles $\triangle AHG$ i $\triangle A'OG$ són semblants; en particular $\angle AGH = \angle A'GO$. Així, doncs, O, G i H són colineals i $(GH) = 2(GO)$.

Teorema 1.7.1: *L'ortocentre, el centroide i el circumcentre d'un triangle són colineals. El centroide divideix la distància entre l'ortocentre i el circumcentre en raó* $2:1$.

La recta que conté aquests tres punts s'anomena la recta d'Euler del triangle.

Considerem ara la següent figura



Prova-ho!

El punt P marcat és el punt mig tant de $B'C'$ com de AA'. La perpendicular per P a BC talla la recta d'Euler en el punt N. Els segments AH, PN i $A'O$ són totes elles perpendiculars a BC. Donat que $(AP) = (PA')$, aquests tres segments estan equiespaiats. Així, doncs, N, que està sobre la mediatriu del segment $B'C'$, és el punt mig del segment OH. Simètricament, aquest punt mig es troba també sobre la mediatriu de $A'B'$. Per tant, N és el circumcentre del triangle $\triangle A'B'C'$.

Teorema 1.7.2: *El punt mig entre l'ortocentre i el circumcentre d'un triangle és el circumcentre del seu triangle medial.*

Exercici 1.7.1: Feu el dibuix anàleg en el cas que el triangle sigui obtusangle.

Exercici 1.7.2: Proveu que

$$(OH)^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

Exercici 1.7.3: Proveu que

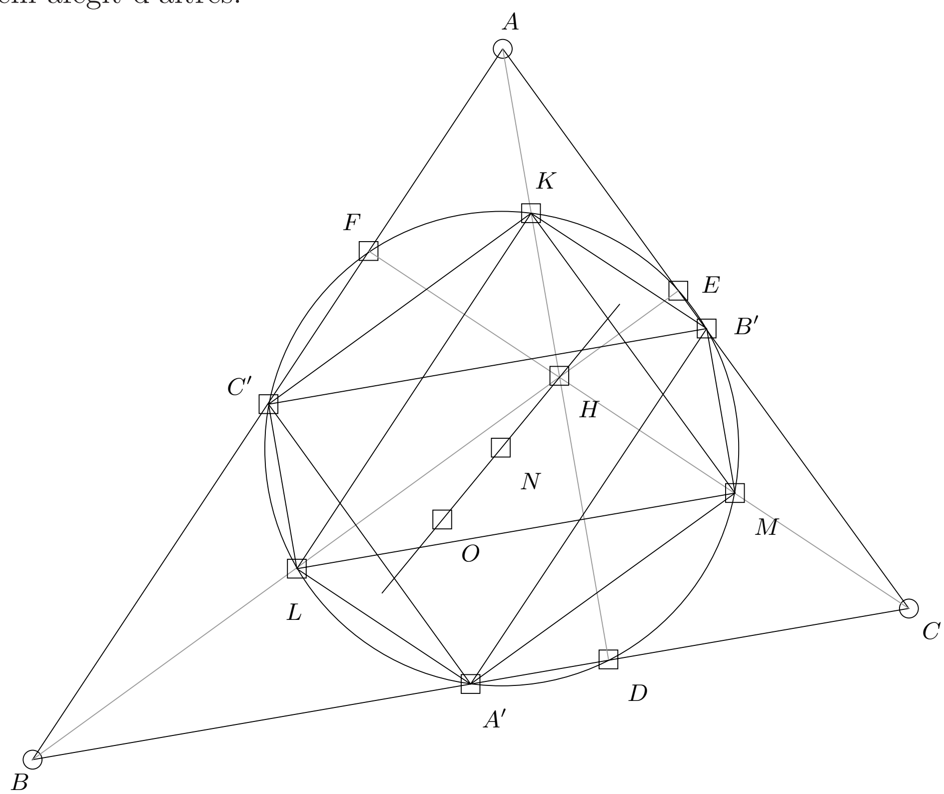
$$(DA') = |b^2 - c^2|/2a.$$

Exercici 1.7.4: Sigui $\triangle ABC$ un triangle tal que la seva recta d'Euler és paral·lela al costat BC. Proveu que, amb aquesta suposició,

$$\tan B \tan C = 3.$$

1.8 El cercle de 9 punts

Considerem ara el següent diagrama, on hem eliminat alguns segments i n'hem afegit d'altres.



Prova-ho!

Els punts K, L i M són els punts mitjos dels segments AH, BH i CH, respectivament.

El segment KL és paral·lel a AB, com també ho és $A'B'$, i a més, $(KL) = (AB)/2 = (A'B')$; per tant $A'B'KL$ és un paral·lelogram. Anàlogament, $B'C'LM$ i $C'A'MK$ són també paral·lelograms. Aquests paral·lelograms són, de fet, rectangles: per al $B'C'LM$ el raonament és que $C'L$ (i $B'M$) és paral·lel a AH (fixeu-vos en el triangle $\triangle AHB$), mentre que LM ho és a BC i AH i BC són perpendiculars.

Així, la circumcentre amb diàmetre $B'L$ passa per C' i M; de fet, $C'M$ és un diàmetre de la mateixa circumferència; anàlogament, considerant ara el rectangle $A'C'KM$ i la circumferència de diàmetre $C'M$ té $A'K$ també com a diàmetre. En resum, els 6 punts A', B', C', K, L i M es troben sobre una circumferència.

A més, donat que el triangle $\triangle A'DK$, és rectangle, la circumferència amb diàmetre $A'K$ passa per D. Anàlogament, la circumferència amb diàmetre $B'L$ passa per E i aquella que té diàmetre $C'M$ passa per F. En resum:

Teorema 1.8.1: *En un triangle, els tres peus de les altures, els tres punts mitjos dels costats i els tres punts mitjos dels segments que uneixen els vèrtexos amb l'ortocentre es troben sobre una mateixa circumferència, i aquesta té radi meitat que el circumradi.*

Exercici 1.8.1: Proveu que el radi del cercle dels 9 punts és meitat que el circumradi.

Considerem els dos triangles $\triangle A'B'C'$ i $\triangle KLM$; aquests són congruents i, de fet, un s'obté a partir de l'altre fent un gir de 180º amb centre el centre de la circumferència dels 9 punts; aquest gir intercanvia els seus ortocentres H i O. Per tant, aquest centre és el punt N que haviem considerat abans (el punt mig de H i O).

Teorema 1.8.2: *El centre del cercle dels* 9 *punts es troba sobre la recta d'Euler; concretament, és el punt mig de l'ortocentre i el circumcentre del triangle.*

Exercici 1.8.2: Proveu que el quadrilàter $AKA'O$ és paral·lelogram.

Exercici 1.8.3: Proveu que en el cercle de 9 punts, el punt K (resp. L i M) bisecta l'arc EF (resp. FD i DE).

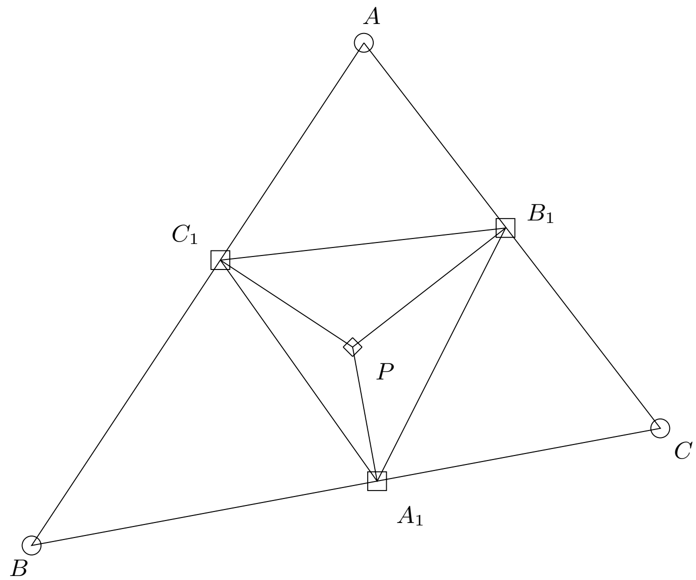
Exercici 1.8.4: El cicumcercle de $\triangle ABC$ és el cercle dels 9 punts del triangle amb vèrtexos els excentres I_a, I_b, I_c de $\triangle ABC$.

Exercici 1.8.5: Siguin A, B, C els punts d'intersecció de tres circumferències congruents concurrents en un punt. Proveu que aquest radi comú és igual al circumradi de $\triangle ABC$ i que el punt de concurrència és el seu ortocentre.

1.9 Triangles pedals

Sigui P un punt a l'interior d'un triangle $\triangle ABC$. Considerem PA_1 el segment perpendicular a BC amb extrems a P i el punt A_1 del segment BC; anàlogament, els segments PB_1 i PC_1 són perpendiculars a AC i AB respectivament, i tenen extrem en aquests costats. El triangle $\triangle A_1B_1C_1$ s'anomena el triangle pedal de $\triangle ABC$ respecte del punt P.

Aquí teniu un exemple:



Prova-ho!

Si P és l'ortocentre de $\triangle ABC$, aleshores el triangle pedal corresponent és el triangle òrtic; si P és el circumcentre de $\triangle ABC$, aleshores el triangle pedal corresponent és el triangle medial.

El segment PC es veu tant des de B_1 com des de A_1 sota un angle de 90^o. Això implica que A_1 i B_1 es troben sobre la circumferència que té PC com a diàmetre. Dit d'altra manera, el punt P pertany al circumcercle de $\triangle A_1B_1C$. Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle A_1B_1C$ tenim que

$$\frac{(A_1B_1)}{\sin C} = 2\,\text{circumradi}(\triangle A_1B_1C) = (PC).$$

Aplicant-lo al triangle $\triangle ABC$ tenim

$$\frac{c}{\sin C} = 2R,$$

on R és el circumradi de $\triangle ABC$. Per tant, obtenim la igualtat

$$(A_1B_1) = c\frac{(PC)}{2R}.$$

Anàlogament,

$$(B_1C_1) = a\frac{(PA)}{2R}, \qquad (C_1A_1) = b\frac{(PB)}{2R}.$$

Per tant, tenim el següent resulat:

Teorema 1.9.1: *Si un punt P es troba a distàncies x, y, z (respectivament) dels vèrtexos d'un triangle $\triangle ABC$, el triangle pedal corresponent té costats de longitud:*

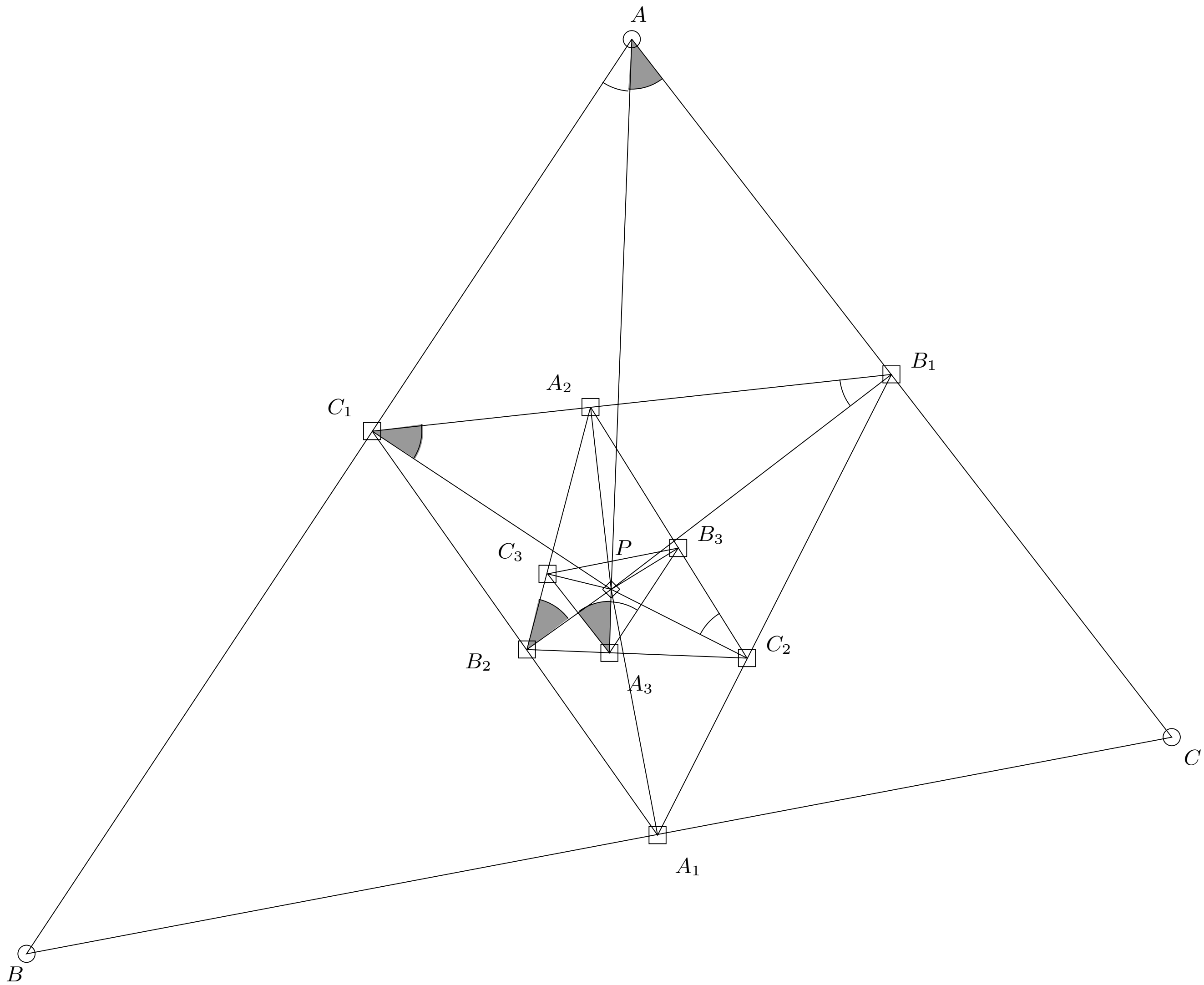
$$\frac{ax}{2R}, \qquad \frac{by}{2R}, \qquad \frac{cz}{2R}.$$

Una cosa que es pot fer amb els triangles pedals és iterar el procés: Si $\triangle A_1B_1C_1$ és el triangle pedal de $\triangle ABC$ respecte de P, podem considerar $\triangle A_1B_2C_2$ el triangle pedal de $\triangle A_1B_1C_1$ respecte de P; aquest s'anomena el segon triangle pedal de $\triangle ABC$ respecte de P. De manera anàloga, es defineix el n-èssim triangle pedal de $\triangle ABC$ respecte de P com el triangle pedal respecte de P del $n-1$-èssim triangle pedal de $\triangle ABC$ respecte de P.

De fet, i llevat de semblances, aquest procés és cíclic:

Teorema 1.9.2: *El tercer triangle pedal es semblant al triangle original.*

Demostració. Considereu el següen diagrama. No us asusteu de veure moltes línees.



Prova-ho!

Degut a que els angles $\angle PB_1A$ i $\angle PC_1A$ són rectes, els punt P, A, B_1, C_1 es troben sobre una mateixa circumferència i, per tant, $\angle PAC_1 = \angle PB_1C_1 = \angle PB_1A_2$. Anàlogament, els punts P, B_1, A_2, C_2 també es troben sobre una circumferència (perquè?) i, per tant, $\angle PB_1A_2 = \angle PC_2A_2 = \angle PC_2B_3$. Un cop més, els punts P, C_2, A_3, B_3 es troben sobre una circumferència i, per tant, $\angle PC_2B_3 = \angle PA_3B_3$.

De manera anàloga (escriviu els detalls) es prova que $\angle PAB_1 = \angle PA_3C_3$. En resum, i sumant angles, es té que

$$\angle BAC = \angle C_1AB_1 = \angle C_1AP + \angle PAC_2 = \angle PA_3B_3 + \angle PA_3C_3 = \angle B_3A_3C_3.$$

El mateix raonament aplicat als vèrtexos B i C prova que

$$\angle BAC = \angle B_3A_3C_3, \qquad \angle ABC = \angle A_3B_3C_3, \qquad \angle ACB = \angle A_3C_3B_3.$$

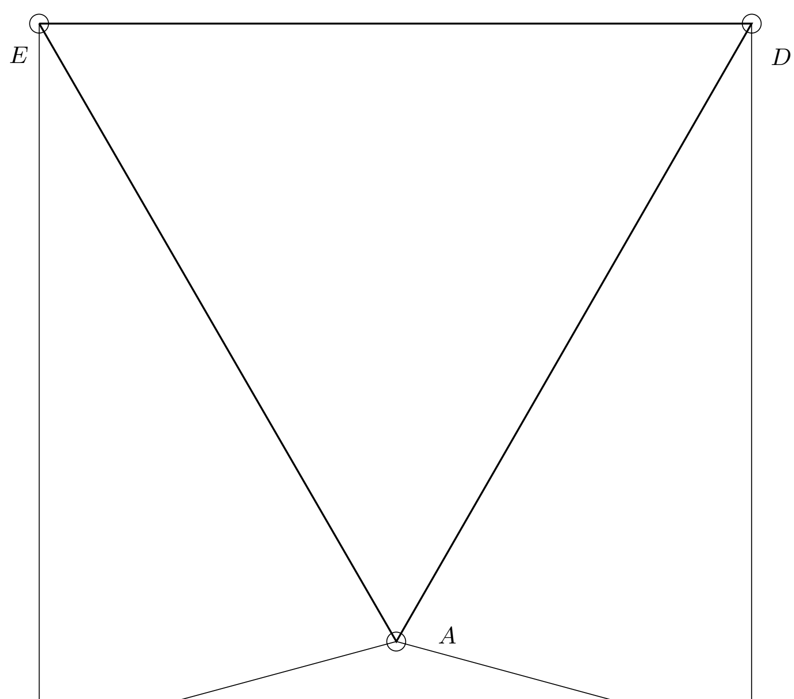
Així, doncs, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A_3B_3C_3$ són semblants. $\square$

1.10 Exercicis (Max-Mix version)

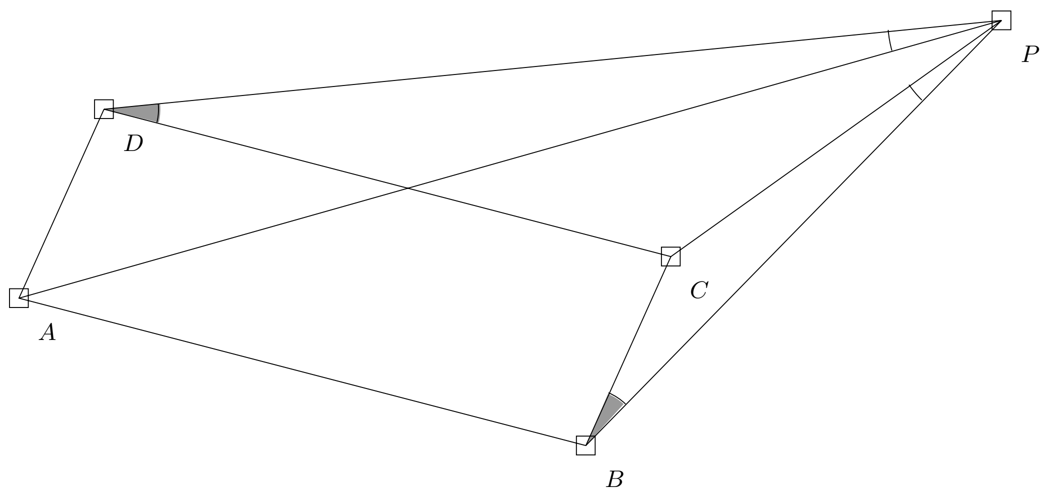
Exercici 1.10.1: Proveu que si una ceviana AQ d'un triangle equilàter $\triangle ABC$ es perllonga fins a intersecar el circumcercle en A i P, aleshores

$$\frac{1}{(PB)} + \frac{1}{(PC)} = \frac{1}{(PQ)}.$$

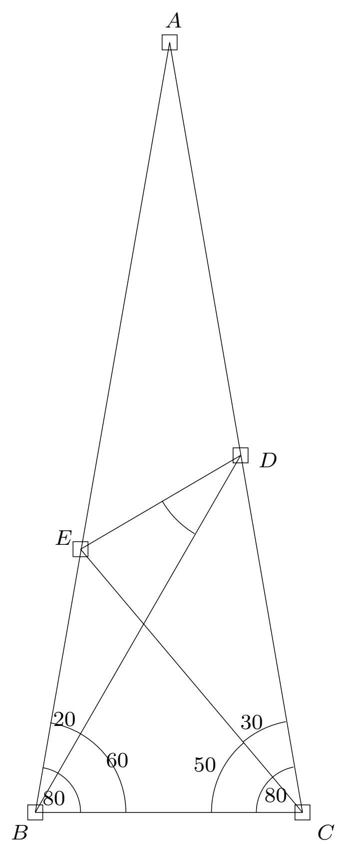
Exercici 1.10.2: Considereu un triangle isòsceles $\triangle ABC$, on els angles iguals són de 15º; sigui A el vèrtex d'angle diferent. Considereu el quadrat que té per costat BC i té A al seu interior. Proveu que el triangle format per A i els vèrtexos del quadrat diferents de B i C és un triangle equilàter:



Exercici 1.10.3: Considereu un paral·lelogram $ABCD$ i un punt exterior P. Proveu que si $\angle PDC = \angle PBC$, aleshores $\angle CPB = \angle DPA$.

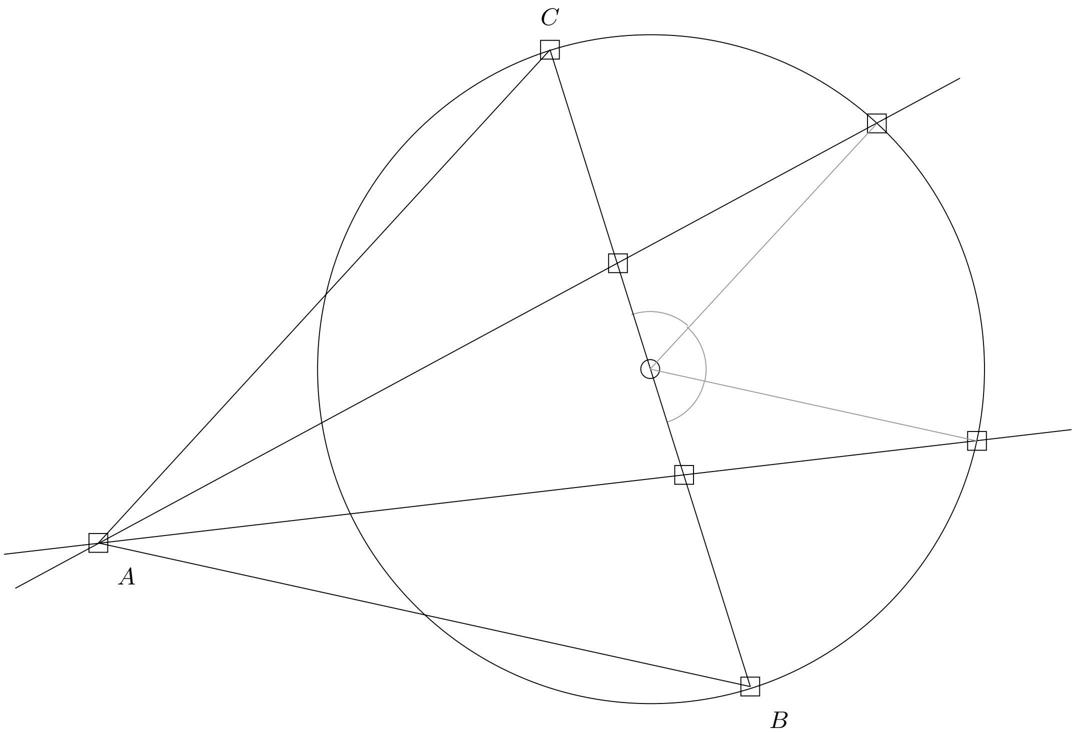


Exercici 1.10.4: Sigui $\triangle ABC$ un triangle isòsceles d'angles iguals en B i C de 80º. Siguin BD i CE cevianes que divideixen els angles en B i C en dos angles de 60º i 20º per a B i de 50º i 30º per a C:



Trobeu l'angle EDB.

Exercici 1.10.5: Sigui $\triangle ABC$ un triangle equilàter. Considereu el semicercle que és exterior al triangle i té BC com a diàmetre. Siguin r i s rectes que passen per A i divideixen el semicercle en tres arcs iguals de 60° cadascun.



Proveu que r i s divideixen el costat BC en tres segments congruents.

Tema 2

Circumferències

En aquest tema veurem propietats de circumferències.

2.1 Tangències

Sigui Γ una circumferència de centre O i radi r. Donat un punt $P \in \Gamma$, la perpendicular per P al segment radial OA és per definició la tangent a Γ per P. Aquesta definició és equivalent a dir que és la única recta que passa per P i té un únic punt d'intersecció amb Γ. En efecte, si la recta construida tingués un altre punt P' d'intersecció amb Γ, aleshores el triangle $\triangle POP'$ seria isósceles, amb angles iguals $\angle OPP' = \angle OP'P = 90^{\text{o}}$, cosa que és impossible.

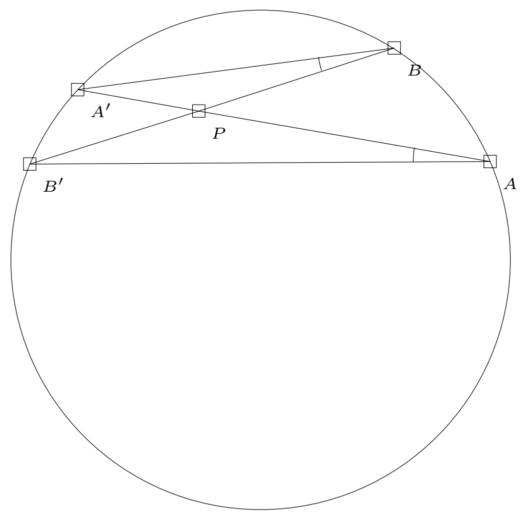
2.2 Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui Γ una circumferència i P un punt no sobre Γ.

Teorema 2.2.1: *Considerem dues rectes que passen per P; si la primera talla Γ en dos punts A i A' (possiblement coincidents, en el cas que la recta sigui tangent a Γ) i la segona en B i B', aleshores*

$$(PA) \cdot (PA') = (PB) \cdot (PB').$$

Demostració. Si P és interior a la circumferència, la situació és com al diagrama següent:



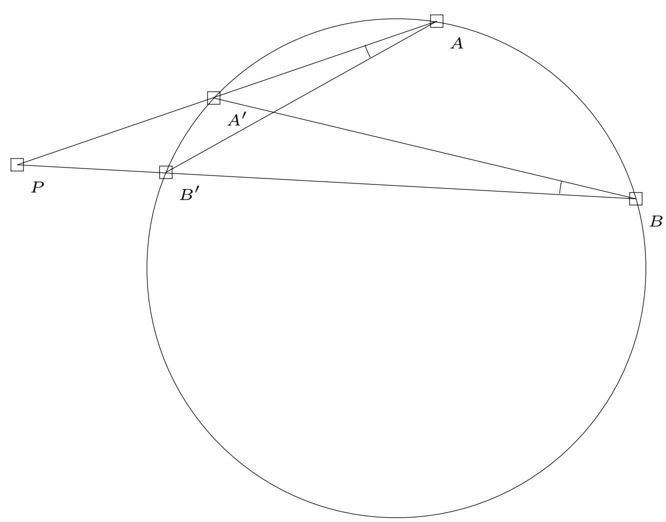
Prova-ho!

Aleshores els triangles $\triangle AB'P$ i $\triangle BA'P$ són semblants. Per tant

$$\frac{(PA)}{(PB')} = \frac{(PB)}{(PA')}$$

i obtenim el resultat desitjat.

Si P es troba a l'exterior de la circumferència, aleshores el que tenim (suposant que no hi ha tangències) és:

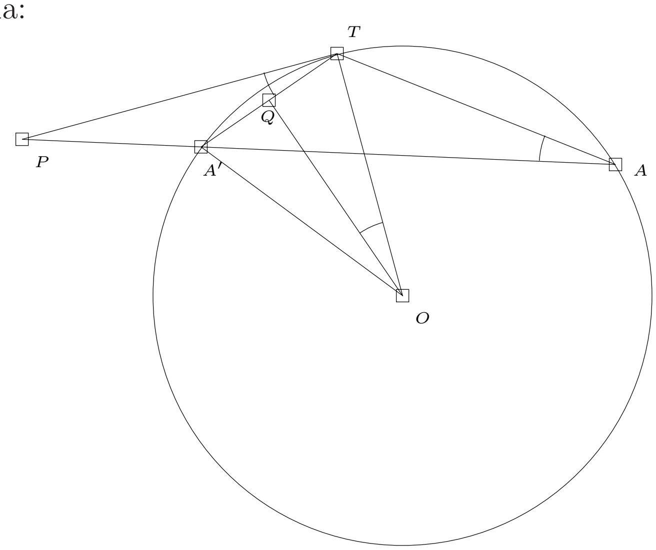


Prova-ho!

En aquest cas, els triangles $\triangle PAB'$ i $\triangle PBA'$ són també semblants i obtenim com abans la relació

$$\frac{(PA)}{(PB')} = \frac{(PB)}{(PA')}.$$

En aquest mateix cas de punt exterior vegem que passa si tenim un únic punt d'intersecció amb una de les rectes, és a dir, una de les rectes és tangent a la circumferència:



Prova-ho!

Ara es té $\triangle PTA' \sim \triangle PAT$; en efecte, els angles $\angle PTA'$ i $\angle TAP$ són iguals ja que $\angle PTA' = \angle TOQ = \frac{1}{2}\angle TOA' = \angle TAA' = \angle TAP$. Per tant es té

$$\frac{(PT)}{(PA)} = \frac{(PA')}{(PT)},$$

d'on

$$(PA)(PA') = (PT)^2,$$

tal com voliem provar. $\square$

Per tant, el producte de les distàncies entre un punt P i els dos punts de tall d'una recta que passa per P amb una circumferència Γ tan sols depèn de P i de Γ; aquesta constant s'anomena la potència de P respecte de Γ.

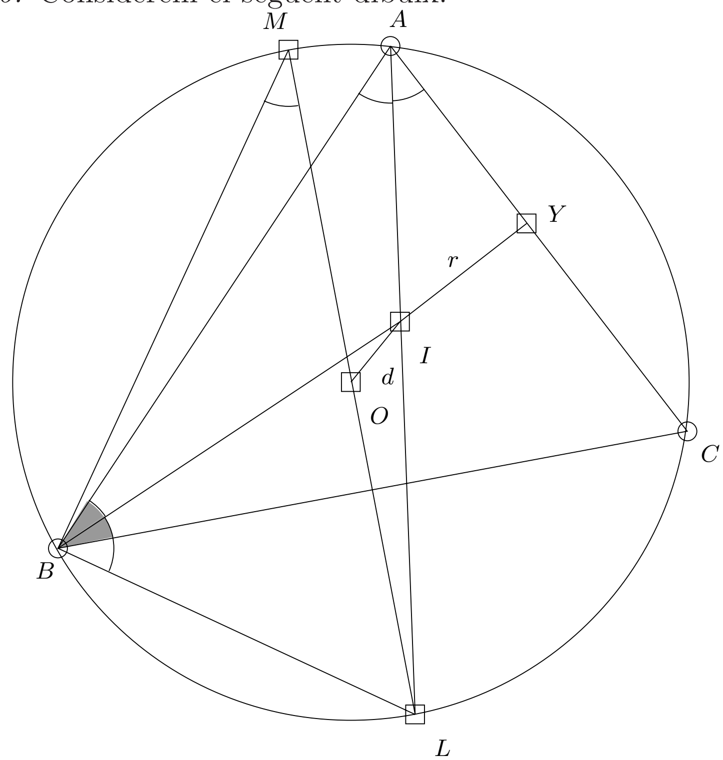
Es pot trobar una expressió molt senzilla per a la potència considerant la recta que passa per P i O, el centre de Γ. Diguem $d = (OP)$ i R el radi de Γ. Si el punt és interior a la circumferència, aleshores la potència és $(R+d)(R-d) = R^2 - d^2$. Si el punt és exterior, aleshores és $(d+R)(d-R) = d^2 - R^2$.

Sovint es considera la potència "amb signe" de manera que punts interiors a la circumferència es consideren amb signe negatiu i els exteriors amb signe positiu. Amb aquest conveni, l'expressió per a la potència (amb signe) és sempre $d^2 - R^2$.

Com a aplicació d'aquest resultat, tenim el següent teorema que lliga el circumradi i l'inradi d'un triangle.

Teorema 2.2.2: *Sigui d la distància entre l'incentre i el circumcentre d'un triangle, r l'inradi i R el circumradi. Aleshores $d^2 = R^2 - 2rR$.*

Demostració. Considerem el següent dibuix:



Prova-ho!

El punt L és la intersecció de la bisectriu en A amb el circumcercle, M és el punt diametralment oposat a L en el circumcercle; Y és la projecció ortogonal de I sobre AC, de manera que $r = (IY)$.

El punt L és el punt mig de l'arc amb extrems B i C que no conté A i el diàmetre LM és perpendicular a BC (Perquè?). Diguem $\alpha = \frac{1}{2}A$, $\beta = \frac{1}{2}B$. Aleshores $\angle BML = \angle BAL = \alpha$ i $\angle LBC = \angle LAC = \alpha$.

Es té que $\angle BIL = \alpha + \beta = \angle LBI$ (fixeu-vos amb el triangle $\triangle AIB$).

Per tant, $\triangle LBI$ és isósceles amb $(LI) = (LB)$. Per tant,

$$\begin{aligned}
R^2 - d^2 &= (IL)(IA) \\
&= (LB)(IA) \\
&= (LM)\frac{(LB)(LM)}{(IY)(IA)}(IY) \\
&= (LM)\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}(IY) \\
&= (LM)(IY) \\
&= 2Rr,
\end{aligned}$$

d'on

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

com voliem provar. □

Exercici 2.2.1: Considerant la potència amb signe, quin és el menor valor que pot prendre? A quin punt el pren?

Exercici 2.2.2: Quin és el lloc geomètric dels punts amb potència constant respecte d'una circumferència?

Exercici 2.2.3: Si la potència (amb signe) d'un punt respecte d'una circumferència és t^2, interpreta t geomètricament.

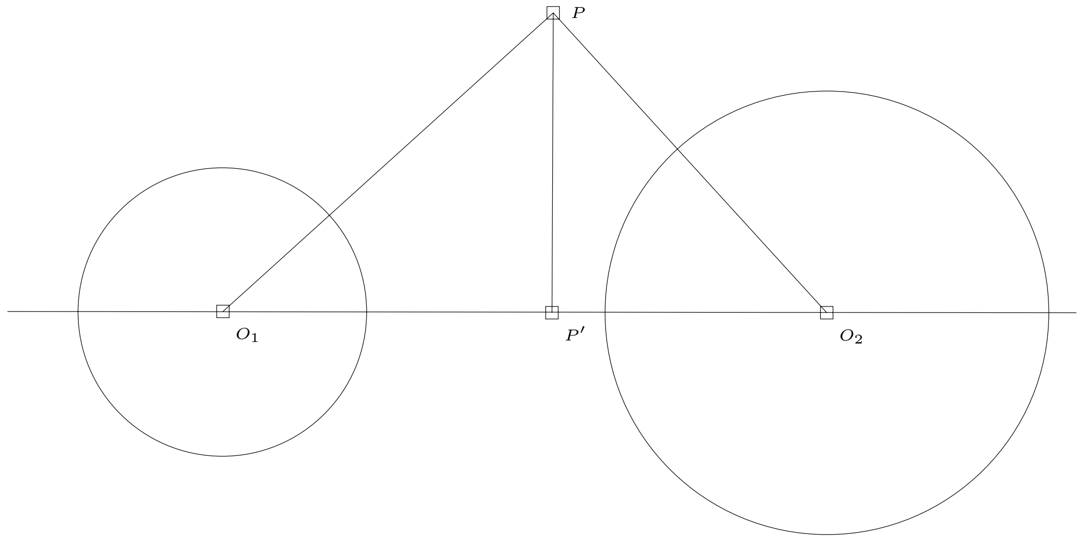
Exercici 2.2.4: Siguin PT i PU tangents des de P a dos circumferències concèntriques, amb T sobre la circumferència de menor radi; sigui Q el punt d'intersecció de la circumferència major amb el segment PT. Proveu que $(PT)^2 - (PU)^2 = (QT)^2$.

Exercici 2.2.5: Proveu que l'inradi d'un triangle és menor o igual que la meitat del circumradi.

2.3 Eix radical de dues circumferències

Siguin Γ_1 i Γ_2 dues circumferències, amb centres respectius O_1 i O_2 i radis r_1 i r_2. S'anomena l'eix radical de Γ_1 i Γ_2 el lloc geomètric dels punts tals que la seva potència respecte de Γ_1 i Γ_2 és igual. En aquesta secció veurem que l'eix radical és una recta perpendicular a la recta que uneix els centres O_1 i O_2.

Considerem en primer lloc el cas que les dues circumferències no es tallen i són exteriors l'una de l'altra. Sigui P un punt exterior a les dues circumferències i P' la seva projecció ortogonal sobre O_1O_2.



Prova-ho!

Les potències de P respecte de O_1 i O_2 són

$$(PO_1)^2 - r_1^2 \qquad \text{i} \qquad (PO_2) - r_2^2.$$

Per tant, aquestes dues són iguals si, i només si, $(PO_1)^2 - (PO_2)^2 = r_1^2 - r_2^2$. Ara bé, pel teorema de Pitàgores, tenim

$$(PO_1)^2 = (PP')^2 + (O_1P')^2,$$
$$(PO_2)^2 = (PP')^2 + (O_2P')^2,$$

d'on la condició anterior es pot escriure com

$$(O_1P')^2 - (O_2P')^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Per tant, la condició que un punt pertanyi a l'eix radical només depèn de la projecció del punt sobre la recta dels centres. Per tant, l'eix radical és una recta perpendicular a la recta de centres.

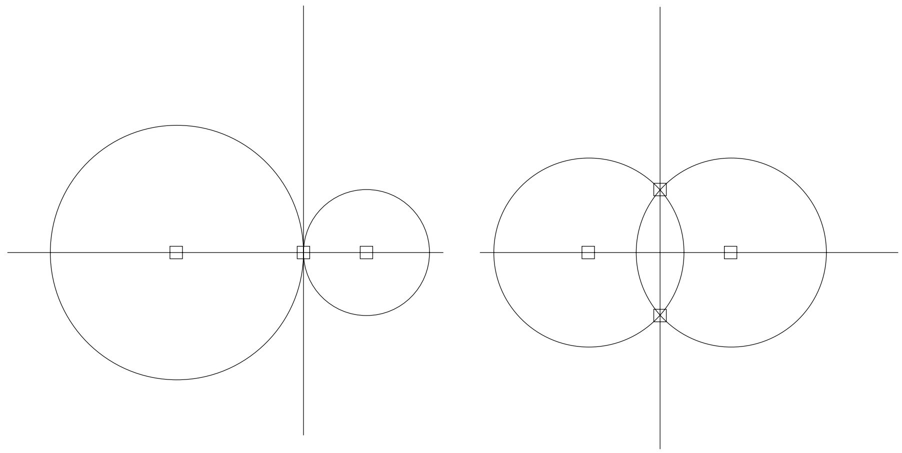
Teorema 2.3.1: *L'eix radical de dues circumferències no concèntriques és una recta perpendicular a la recta que uneix els centres de les circumferències.*

Exercici 2.3.1: Adapteu la prova als casos restants.

Exercici 2.3.2: Què passa si les circumferències són concèntriques?

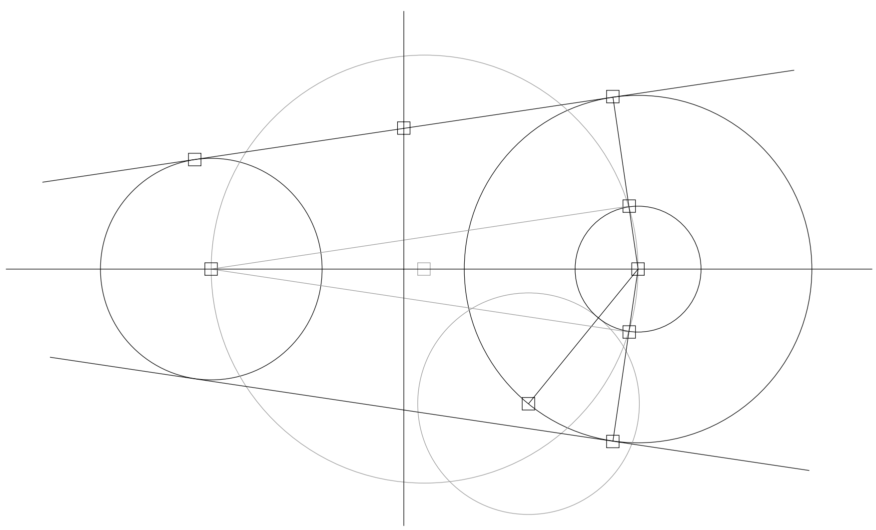
Així, doncs, per tal de trobar l'eix radical n'hi ha prou amb trobar-ne un punt:

- Si les circumferències intersequen en algun punt, aleshores aquest punt pertany a l'eix radical (la potència respecte de les dues circumferències és zero).



Prova-ho!

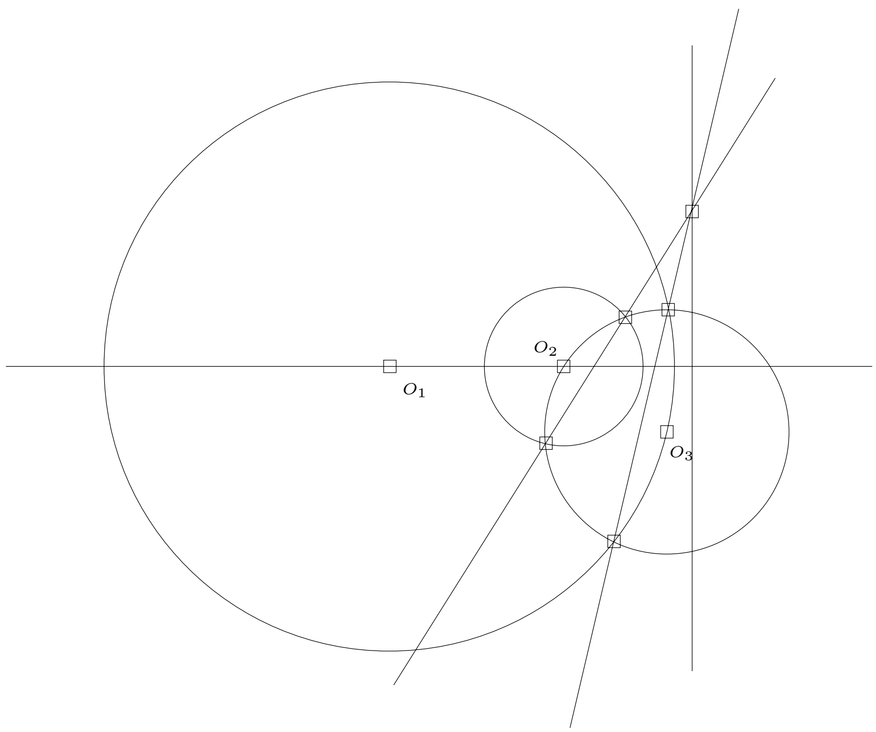
- Si són exteriors l'una de l'altra, traçant un segment tangent comú P_1P_2, el punt mig d'aquest segment pertany a l'eix radical (Perquè?).



Prova-ho!

- Si són interior l'una de l'altra, sigui Γ_3 una circumferència secant a les altres dues i amb centre O_3 fora de O_1O_2. Siguin P_1, P_1' els dos punts d'intersecció amb Γ_1 i P_2, P_2' els dos punts d'intersecció amb Γ_2. L'eix radical de Γ_1 i Γ_3 és la recta que uneix P_1 i P_1'; l'eix radical de Γ_2 i Γ_3

és la recta que uneix P_2 i P_2'; aquestes dues rectes no són paral·leles, ja que són perpendiculars, respectivament, a O_1O_3 i O_1O_2, i aquestes no són paral·leles per construcció. Per tant, aquests dos eixos radicals es tallen en un punt tal que la potència respecte Γ_1 i Γ_3 és igual i tal que la potència respecte de Γ_2 i Γ_3 és igual. Per tant aquest punt pertany a l'eix radical de Γ_1 i Γ_2.



Prova-ho!

Un conjunt de circumferències es diuen coaxials si, dos a dos, tenen el mateix eix axials.

Si tres circumferències tenen centres no alineats, els tres eixos axials són no paral·lels i es tallen en un únic punt (Perquè són concurrents?) que s'anomena el centre radical de les tres circumferències.

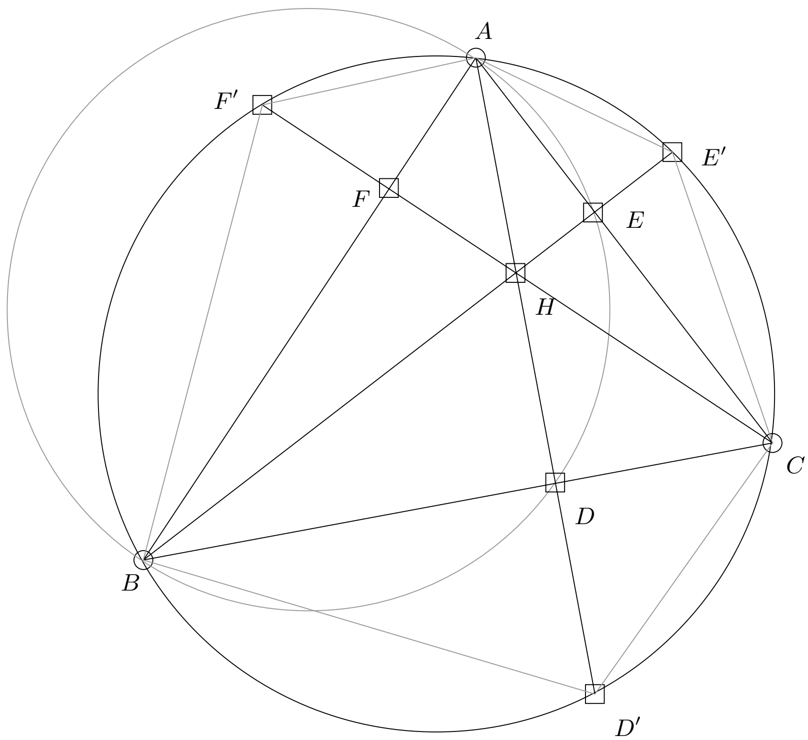
Exercici 2.3.3: Siguin dues circumferències tangents internament i sigui T el punt de tangència. Sigui AB una corda del cercle de major radi que és tangent a l'altra cercle en un punt P. Proveu que la recta TP bisecta l'angle $\angle ATB$.

Exercici 2.3.4: Siguin tres circumferències que no s'intersequen i O el seu centre radical. Proveu que els sis punts de contacte de les sis tangents des de O a les circumferències són concíclics.

2.4 Relació amb altures i ortocentre

En aquesta secció veurem com les altures i l'ortocentre d'un triangle són l'eix radical i el centre radical de circumferències relacionades amb el triangle.

Considerem la figura següent:



Prova-ho!

En aquesta figura apareixen les tres altures AD, BE i CF d'un triangle $\triangle ABC$ exteses fins a intersecar en D', E' i F' (respectivament) el circumcercle del triangle.

Considerem els angles $\angle BAD$, $\angle BCD'$ i $\angle BCH = \angle BCF$. Es té que $\angle BAD = \angle BCF$, ja que són angles dels triangles rectangles $\triangle BAD$ i $\triangle BCF$ i aquests comparteixen l'angle $\angle B$. Per altra banda, $\angle BAD = \angle BAD' = \angle BCD'$ ja que els punts B, A, C, D' es troben sobre una circumferència. Per tant, $\angle DCH = \angle DCD'$. Així, doncs, els triangles rectangles $\triangle DCH$ i $\triangle DCD'$ són congruents; en particular, $(DH) = (DD')$. Anàlogament, tenim:

$$(DH) = (DD'), \qquad (EH) = (EE'), \qquad (FH) = (FF').$$

Notem que la circumferència de diàmetre AB passa per D i E (des d'aquests punts es veu AB sota un angle recte). La potència de H respecte d'aquesta circumferència és $(HA)(HD) = (HB)(HE)$. Anàlogament, tenim $(HB)(HE) = (HC)(HF)$; per tant,

$$(HA)(HD) = (HB)(HE) = (HC)(HF).$$

Notem que cadascun d'aquests termes és la potència de H respecte les circumferències amb diàmetres els costats del triangle. La igualtat entre aquests termes implica el següent teorema.

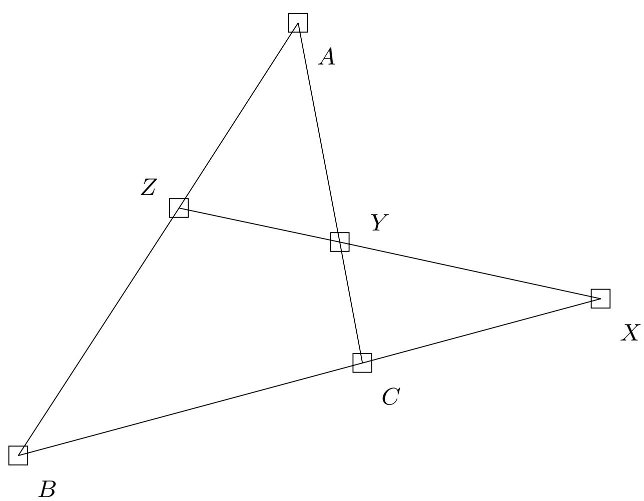
Teorema 2.4.1: *L'ortocentre d'un triangle és el centre radical de les tres circumferències amb diàmetres respectius els costats del triangle.*

Aquest resultat és un cas particular del següent:

Teorema 2.4.2: *Sigui $\triangle ABC$ un triangle i AX, BY, CZ tres cevianes. El centre radical de les circumferències que tenen les cevianes per diàmetres (suposant-les no coaxials) és l'ortocentre de $\triangle ABC$.*

Exercici 2.4.1: Proveu aquest teorema.

Aquest darrer teorema té conseqüències importants en l'estudi dels quadrilàters complets. Un quadrilàter complet és una configuració com la que apareix a la figura següent:

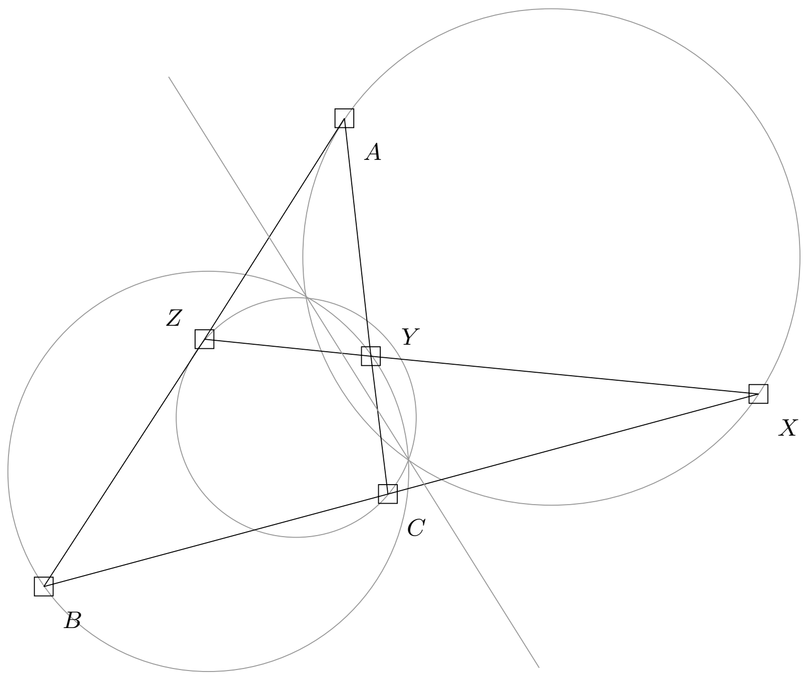


Es pot pensar com un quadrilàter amb cap parell de costats paral·lels, amb costats no adjacents extesos fins a intersercar-se; també es pot veure com un conjunt de 4 rectes amb cap parell de rectes paral·leles, juntament amb els 6 punts d'intersecció.

Teorema 2.4.3: *Donat un quadrilàter complet, de manera que les ternes de punts alineats són XBC, YCA, ZAB, XYZ, les circumferències que tenen els segments AX, BY i CZ com a diàmetre són coaxials, i l'ortocentre dels quatre triangles $\triangle AYZ$, $\triangle BZX$, $\triangle CXY$ i $\triangle ABC$ estan alineats.*

Demostració. Vegem el quadrilàter complet com la configuració donada per un triangle $\triangle ABC$ i tres cevianes AX, BY, CZ (diem cevianes en un sentit més ampli, on els extrems X, Y, Z es troben sobre els segments oposats a A, B, C, respectivament, extesos) de manera que X, Y, Z estàn alineats.

Aquesta mateixa interpretació ens deixa veure la configuració com el triangle $\triangle AYZ$ i els punts B, C, X alineats i sobre els costats del triangle. Anàlogament $\triangle BZX$ i els punts Y, C, A; i també $\triangle CXY$ i Z, A, B.



Prova-ho!

Per tant, les circumferències amb diàmetres AX, BY, CZ compleixen que el seu eix radical passa per H i, simètricament, pels ortocentres dels restants 3 triangles (que, conseqüentment, estan alineats); el fet que siguin coaxials les 3 circumferències surt del fet que tenen més d'un punt en comú. $\square$

Exercici 2.4.2: Sigui $\triangle ABC$ un triangle i H el seu ortocentre. Proveu que A és l'ortocentre de $\triangle HBC$, B l'ortocentre de $\triangle HAC$ i C és l'ortocentre de $\triangle HAB$. Es diu que $ABCH$ formen un triangle ortocèntric.

Exercici 2.4.3: Proveu que els 4 triangles amb vèrtexos un subconjunt dels vèrtexos d'un quadrilàter ortocèntric tenen igual circumradi.

Exercici 2.4.4: Proveu que el triangle que té per vèrtexos els punts on les altures tallen el circumcercle és semblant al triangle òrtic.

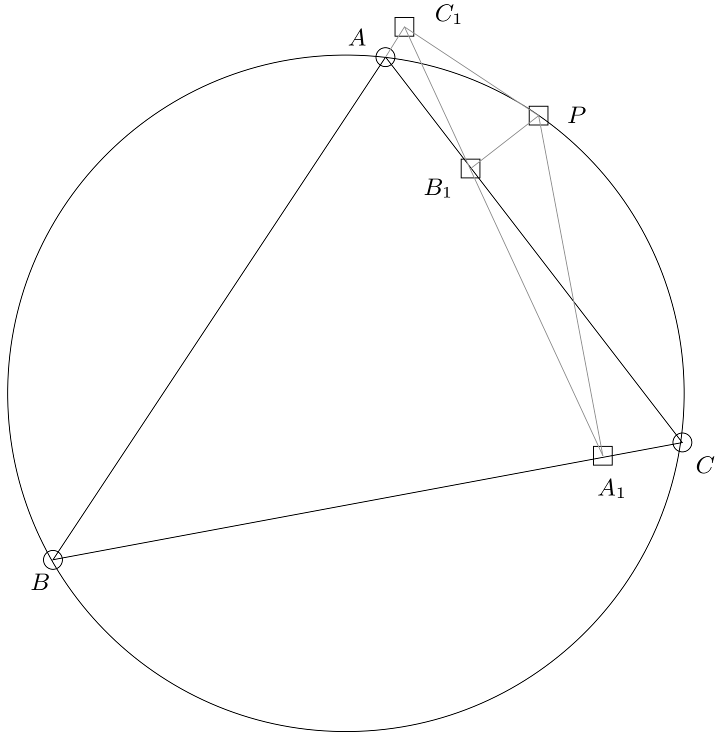
Exercici 2.4.5: Siguin L, M, N els punts d'intersecció dels bisectors (interiors) d'un triangle amb el circumcercle. Trobeu els angles de $\triangle LMN$ en funció dels de $\triangle ABC$.

2.5 Rectes de Simson

Al capítol anterior vam estudiar el triangle pedal associat a un punt de l'interior d'un triangle. La mateixa construcció, amb les projeccions enteses sobre costats extesos, es pot fer des d'un punt exterior al triangle. Aquesta construcció proporciona triangles sempre, llevat d'escollir un punt sobre el circumcercle del triangle; en aquest cas, les tres projeccions estan alineades, i la recta que els uneix s'anomena la recta de Simson respecte del punt.

Teorema 2.5.1: *Sigui $\triangle ABC$ un triangle, P un punt, i A_1, A_2, A_3 les projeccions ortogonals de P sobre els costats (extesos) de $\triangle ABC$. Aleshores A_1, A_2, A_3 estan alineats si, i només si, P es troba sobre el circumcercle de $\triangle ABC$.*

Demostració. Considerem la següent figura, on suposem que P es troba sobre l'arc amb extrems A i el punt diametralment oposat a B que no conté C (els altres casos són simètrics):



Prova-ho!

Notem que el segment PA es veu tant des de B_1 com des de C_1 sota un angle recte; anàlogament, PB es veu des de A_1 i des de C_1 sota un angle recte i PC es veu sota un angle recte des de B_1 i des de A_1. Així, doncs, els punts P, A, B_1, C_1 es troben sobre una mateixa circumferència, i anàlogament els punts P, B, A_1, C_1 i P, C, A_1, B_1.

Com que $\angle APC = 180^{\text{o}} - \angle B$ i $\angle C_1PA_1 = 180^{\text{o}} - \angle B$ (angles oposats en un quadrilàter inscrit en circumferència), es té

$$\angle APC = \angle C_1PA_1.$$

Restant $\angle APA_1$, obtenim

$$\angle A_1PC = \angle C_1PA.$$

Per estar A_1, B_1, P, C sobre una circumferència, es té

$$\angle A_1PC = \angle A_1B_1C,$$

i per estar C_1, A, B_1, P també sobre una circumferència, es té

$$\angle C_1PA = \angle C_1B_1A.$$

Ajuntant els dos resultats, tenim

$$\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$$

i, per tant, els punts A_1, B_1, C_1 estan alineats. $\square$

Exercici 2.5.1: Proveu el recíproc. Indicació: Seguiu el raonament a l'inrevés.

Exercici 2.5.2: Trobeu quins punts del circumcercle són tals que la seva recta de Simson coincideix amb un costat del triangle.

Exercici 2.5.3: Siguin AB i AC els segments tangents des d'un punt A exterior a una circumferència Γ. Sigui $\triangle A_1, B_1, C_1$ el triangle pedal de $\triangle ABC$ des d'un punt de Γ. Proveu que $(PA_1)^2 = (PB_1)(PC_1)$.

Tot i que el triangle pedal des d'un punt del circumcercle és, com hem vist, degenerat, es segueixen complint les igualtats:

$$(B_1C_1) = \frac{a(AP)}{2R}, \qquad (A_1C_1) = \frac{b(BP)}{2R}, \qquad (A_1B_1) = \frac{c(CP)}{2R}.$$

Ara bé, donat que $(A_1B_1) + (B_1C_1) = (A_1C_1)$, tenim que $c(CP) + a(AP) = b(BP)$, d'on obtenim:

$$(AB)(CP) + (BC)(AP) = (AC)(BP).$$

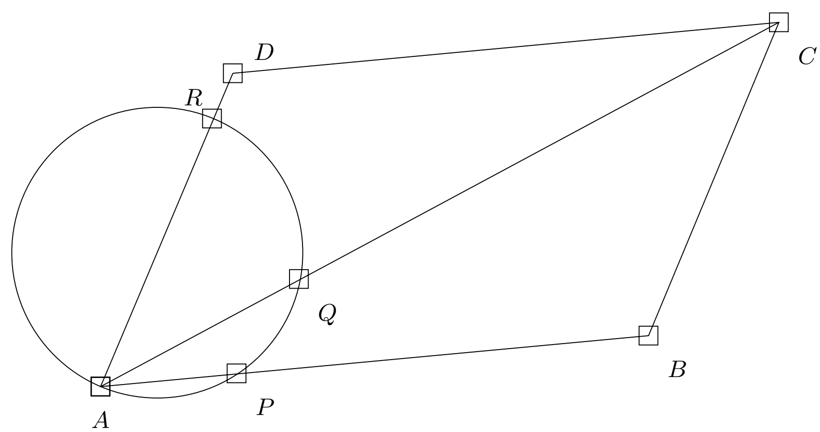
Això prova el següent resultat clàssic:

Teorema 2.5.2 (Teorema de Ptolomeu): *Si un quadrilàter s'inscriu en una circumferència, la suma dels productes dels costats oposats és igual al producte de les diagonals.*

Exercici 2.5.4: Proveu el recíproc del teorema de Ptolomeu: Si en un quadrilàter, la suma dels productes dels costats oposats és igual al producte de les diagonals, aleshores el quadrilàter s'inscriu en una circumferència.

Exercici 2.5.5: Proveu que si P es troba sobre l'arc CD del circumcercle d'un quadrat $ABCD$, aleshores $(PA)((PA)+(PC)) = (PB)((PB)+(PD))$.

Exercici 2.5.6: Sigui $ABCD$ un paral·lelogram i Γ una circumferència que passa per A i talla el costat AD en R, el costat AB en P i la diagonal AC en Q.

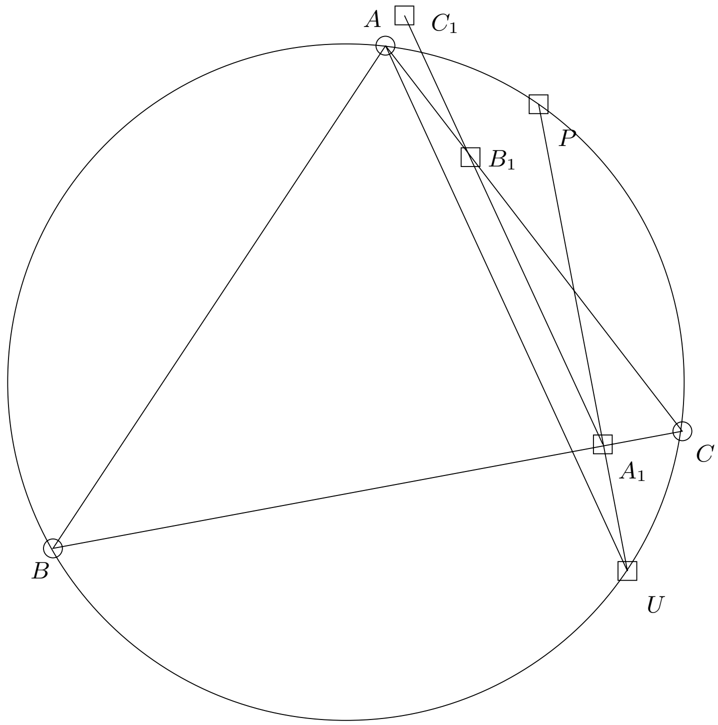


Proveu que $(AP)(AB) + (AR)(AD) = (AQ)(AC)$. Indicació: El triangle $\triangle PQR$ serà semblant a $\triangle CBA$.

El següent resultat descriu una recta paral·lela a la recta de Simson i es pot fer servir per a trobar angles entre rectes de Simson.

Teorema 2.5.3: *Sigui $\triangle ABC$ un triangle i P un punt del circumcercle; sigui U el segon punt d'intersecció de la perpendicular a BC per P. Aleshores la recta AU és paral·lela a la recta de Simson respecte del punt P.*

Demostració. Considerem la següent figura:



Prova-ho!

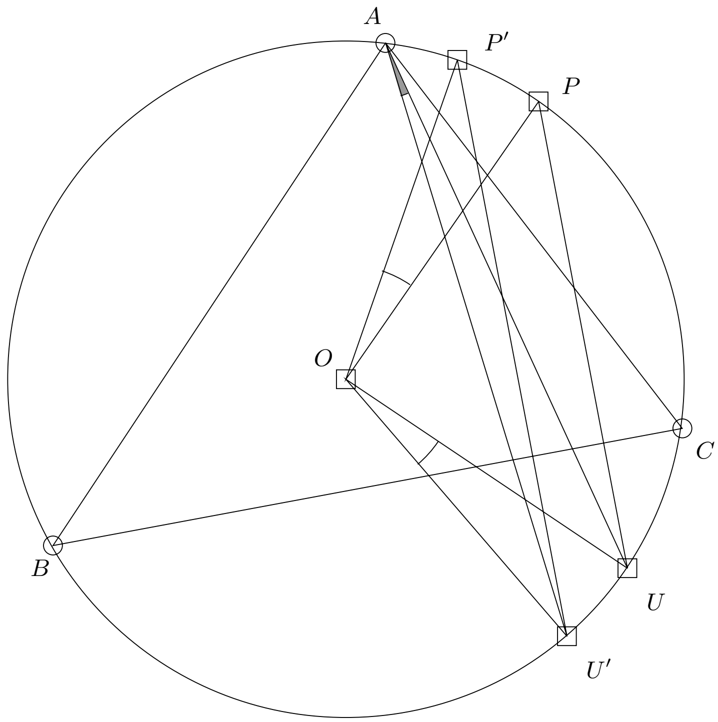
Degut a que els punts P, A, U, C i P, B_1, A_1, C són concíclics, es té que

$$\angle PUA = \angle PCA = \angle PCB_1 = \angle PA_1B_1,$$

i d'aquí se'n dedueix el resultat. $\square$

Teorema 2.5.4: *L'angle entre les rectes de Simson respecte de dos punts P i P' és igual a la meitat de l'angle sota el qual es veu la corda PP' des del circumcentre.*

Demostració. Pel resultat anterior, l'angle entre les rectes de Simson és igual a l'angle entre les rectes AU i AU' construides a partir de P i P' com a la figura següent:



Prova-ho!

Així, l'angle buscat és

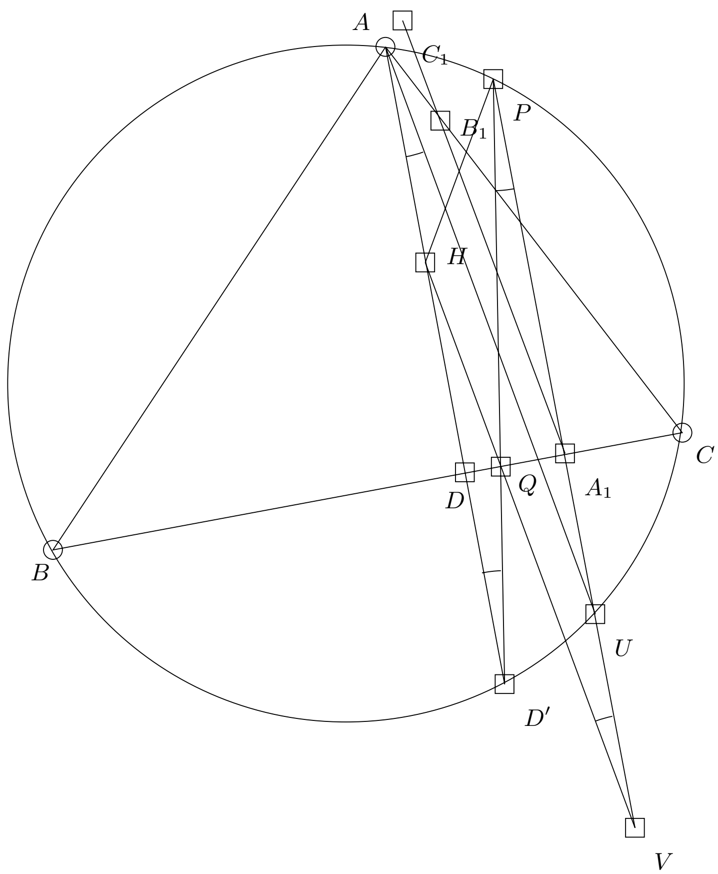
$$\angle UAU' = \frac{1}{2}\angle UOU' = \frac{1}{2}\angle POP',$$

on la única igualtat no trivial és la última i prové del fet que els punts U i U' són els simètrics de P i P' respecte del diàmetre paral·lel al costat BC. $\square$

Acabem aquesta secció sobre la recta de Simson donant aquest resultat.

Teorema 2.5.5: *La recta de Simson d'un triangle $\triangle ABC$ respecte d'un punt P bisecta el segment que uneix P amb H, l'ortocentre de $\triangle ABC$.*

Demostració. Considerem la figura següent,



Prova-ho!

on V és el punt simètric de P respecte de BC i Q és el punt d'intersecció de HV i PD'. Es té que Q es troba sobre el segment BC, ja que $(HD) = (DD')$.

Aleshores

$$\angle D'HV = \angle PVH = \angle D'PU = \angle D'AU,$$

per tant, la recta HV és paral·lela a AU i, per tant, a la recta de Simson respecte del punt P. Per tant, al triangle $\triangle PHV$, el segment A_1B_1 és paral·lel a HV i bisecta PV; així, també bisecta l'altra costat PH i obtenim el resultat. □

Exercici 2.5.7: Proveu que les rectes de Simson respecte de punts diametralment oposats són perpediculars l'una de l'altra i el seu punt d'intersecció es troba sobre el cercle de nou punts.

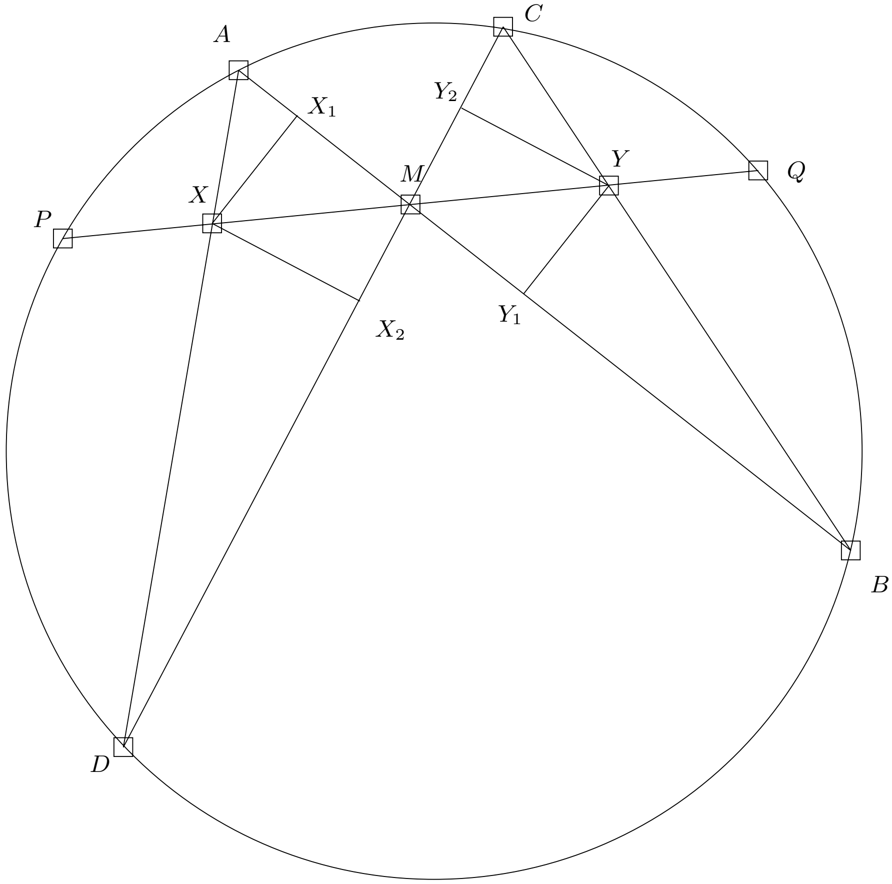
Exercici 2.5.8: Sigui $\triangle ABC$ un triangle equilàter, O el circumcentre i P un punt del circumcercle. Proveu que la recta de Simson respecte de P bisecta el radi OP.

2.6 El teorema de la papallona

Acabarem aquest capítol amb dos resultats que s'aparten una mica de la línea de la resta de resultats; el primer és el teorema de la papallona i s'inclou degut a que la demostració més senzilla fa servir la potència d'un punt respecte d'una circumferència.

Teorema 2.6.1: *Sigui PQ la corda d'una circumferència, M el seu punt mig; siguin AB i CD cordes que passen per M. Siguin X i Y els punts d'intersecció de AD i BC amb PQ. Aleshores M és el punt mig de X i Y.*

Demostració. Considerem la figura següent:



Prova-ho!

On hem posat X_1 i X_2 les projeccions ortogonals de X sobre AB i CD; anàlogament Y_1 i Y_2 són les projeccions de Y sobre els mateixos segments.

Es tenen les següents semblances:

$$\begin{aligned}\triangle AX_1X &\simeq \triangle CY_2Y,\\ \triangle MX_1X &\simeq \triangle MY_2Y,\\ \triangle MX_2X &\simeq \triangle MY_1Y,\\ \triangle DX_2X &\simeq \triangle BY_1Y.\end{aligned}$$

Diguem, per comoditat,

$$a = (PM), \qquad x = (XM), \qquad y = (YM),$$

$$x_1 = (XX_1), \qquad y_1 = (YY_1), \qquad x_2 = (XX_2), \qquad y_2 = (YY_2).$$

De les semblances se'n dedueix que

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}, \qquad \frac{x_1}{y_2} = \frac{(AX)}{(CY)}, \qquad \frac{x_2}{y_1} = \frac{(XD)}{(YB)}.$$

Per tant,

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1x_2}{y_1y_2} = \frac{x_1}{y_2}\frac{x_2}{y_1} = \frac{(AX)}{(CY)}\frac{(XD)}{(YB)} = \frac{(AX)(XD)}{(CY)(YB)} =$$

per potència d'un punt respecte d'una circumferència

$$= \frac{(PX)(XQ)}{(QY)(YP)} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a-y)(a+y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2} =$$

i ja que si $a/b = c/d$, aleshores $a/b = (a-c)/(b-d)$,

$$= \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

Per tant, $x = y$, tal com volíem provar. □

Exercici 2.6.1: Trobeu una altra demostració del teorema de la papallona.

Exercici 2.6.2: Siguin PT i PB segments tangents a una circumferència des d'un punt P, AB el diàmetre que passa per B i H la projecció de T sobre AB. Proveu que AP bisecta TH

Exercici 2.6.3: Sigui X el punt de tangència de l'incercle d'un triangle $\triangle ABC$ amb el costat BC; sigui A' el punt mig de BC. Proveu que la recta $A'I$ bisecta el segment AX.

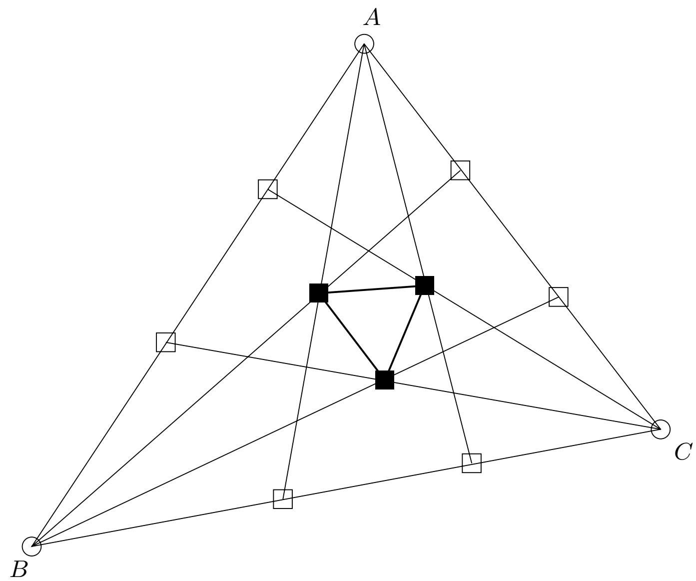
2.7 El teorema de Morley

Aquest teorema que provarem és també un *off-topic* en el sentit que és un teorema "modern" (inicis del segle XX) i, a més, la construcció a que fa referència no es pot fer amb regle i compàs.

En un triangle $\triangle ABC$, considerarem, per a cada vèrtex, els trisectors; és a dir, les rectes que divideixen cada angle en tres angles iguals.

Teorema 2.7.1: *Els punts d'intersecció dels trisectors adjacents dels angles d'un triangle són els vèrtexos d'un triangle equilàter.*

La següent figura il·lustra l'enunciat del teorema.



[La demostració i el lema anterior apareixarà pròximament]

Exercici 2.7.1: Per a quins triangles $\triangle ABC$, els punts A, Y', Z, Y, Z', Z' són els vèrtexos d'un pentàgon regular?

Exercici 2.7.2: Si $\triangle ABC$ és equilàter, proveu que els punts A, Y', Z, Y, Z', Z' són vèrtexos d'un 9-àgon regular i, a més, el vèrtex A és oposat al costat ZY.

Exercici 2.7.3: Proveu que el triangle $\triangle XYZ$ té costats iguals a

$$8R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

Exercici 2.7.4: Proveu que si Y, Z es troben en un dels semiplans limitats per $Y'Z'$, i C, B en l'altre, amb $CBY'Z'$ format un rectangle amb centre X i $(Z'Y) = (YZ) = (ZY')$, aleshores BX i BZ trisequen l'angle recte en B.

Tema 3

Polígons: Concurrència i colinealitat

En aquest tema donarem una introducció a propietats de polígons que tenen a veure amb colinealitat de punts i concurrència de rectes.

Introducció: Polígons i àrea

Un polígon es pot definir com una llista ordenada de vèrtexos:

$$P_1 P_2 \ldots P_n,$$

juntament amb els segments que determinen,

$$P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1.$$

Suposarem sempre que no hi ha vèrtexos repetits. Direm que el polígon és simple si costats diferents no s'intersequen (llevat d'aquells amb un extrem comú).

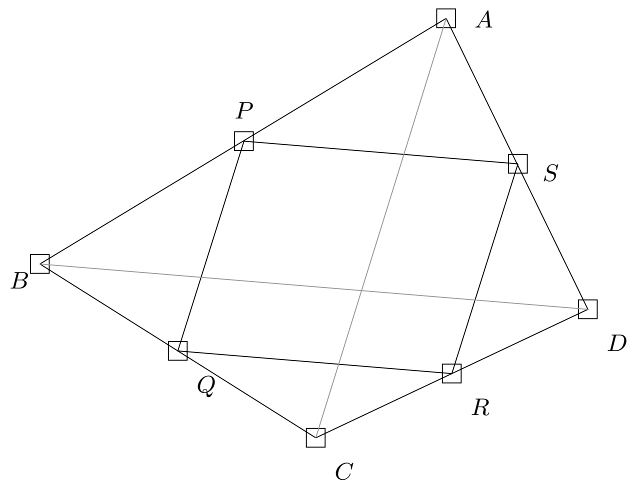
Tot polígon determina una regió fitada del pla; direm que el polígon és convex si aquesta regió és convexa.

Si O és un punt del pla fixat, cada costat PQ determina un triangle $\triangle OPQ$. Notarem l'àrea amb signe de $\triangle OPQ$ com $[OPQ]$ igual a l'àrea de $\triangle OPQ$ amb el signe positiu si OPQ estan ordenats amb el sentit positiu i negatiu altrament. Amb aquestes notacions, l'àrea del polígon és la suma de les àrees amb signe dels triangles determinats pels seus costats i un punt arbitrari.

3.1 El teorema de Varignon

Teorema 3.1.1: *Si $ABCD$ és un quadrilàter qualsevol, els punts mitjos P, Q, R, S dels seus costats (P punt mig de AB, Q punt mig de BC,...) són els vèrtexos d'un paral·lelogram $PQRS$, que s'anomena el paral·lelogram de Varignon de $ABCD$. A més, l'area d'aquest és la meitat de l'àrea del quadrilàter original.*

Demostració. Considerem el cas d'un quadrilàter simple i convex.



Prova-ho!

Si ens fixem en el triangle $\triangle ABD$, veiem que PS és paral·lel a BD; mirant ara $\triangle BCD$, tenim que QR és paral·lel a BD; així, PS és paral·lel a QR. Anàlogament amb els triangle $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$, obtenim que PQ és paral·lel a RS. Resumint, $PQRS$ és un paral·lelogram.

Pel que respecta a la seva àrea, temin

$$\begin{aligned}(PQRS) &= (ABCD) - (PBQ) - (RDS) - (QCR) - (SAP) \\ &= (ABCD) - \frac{1}{4}(ABC) - \frac{1}{4}(CDA) - \frac{1}{4}(BCD) - \frac{1}{4}(DAB) \\ &= (ABCD) - \frac{1}{4}(ABCD) - \frac{1}{4}(ABCD) \\ &= \frac{1}{2}(ABCD),\end{aligned}$$

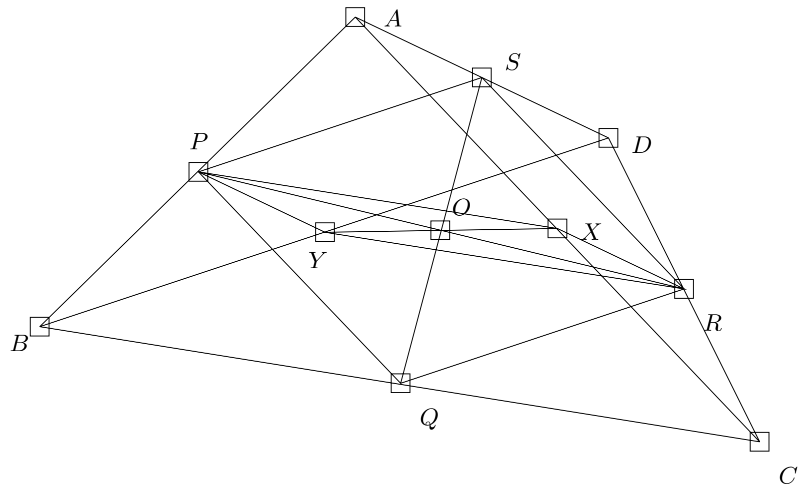
on notem que, per exemple, $(PBQ) = \frac{1}{4}(ABC)$ ja que són triangles semblants amb raó de semblança igual a $\frac{1}{2}$. $\square$

Exercici 3.1.1: Adapteu la prova al cas de quadrilàter no convex i no simple.

El primer resultat de concurrència ve donat pel següent:

Teorema 3.1.2: *En un quadrilàter, els segments que uneixen els punts mitjos de parells de costats i el segment que uneix els punts mitjos de les diagonals són concurrents i cadascun biseca els altres.*

Demostració. Considerem la següent figura:



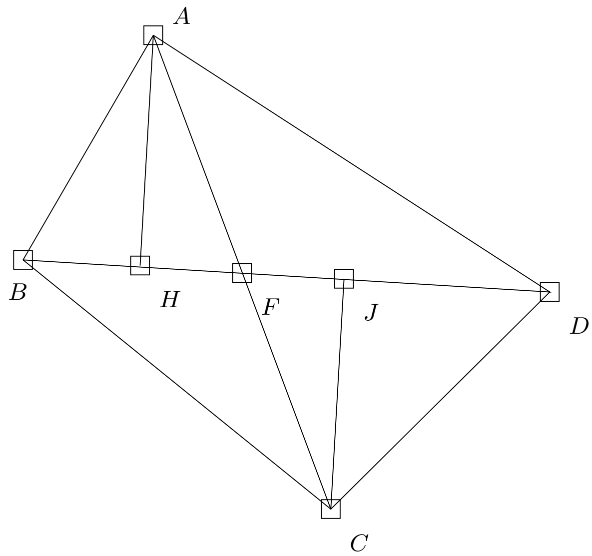
Prova-ho!

On hem posat X el punt mig de la diagonal AC i Y el punt mig de la diagonal BD. Els segments PR i QS són les diagonals del paral·lelogram de Varignon de $(ABCD)$; per tant, es tallen en O i es bisequen mútuament. Considerant ara el quadrilàter $ABDC$, tenim que el seu paral·lelogram de Varignon és $PYRX$ i les diagonals d'aquest: PR i XY també es bisequen mútuament. Per tant, XY té com a punt mig el punt mig de PR, que és O. $\square$

Per tal de provar el darrer resultat de la secció, necessitarem el següent lema:

Lema 3.1.3: *Si una diagonal divideix un quadrilàter en dos triangles d'igual àrea, aleshores biseca l'altra diagonal; recíprocament, si una diagonal biseca l'altra, aleshores divideix el quadrilàter en dos triangles d'igual àrea.*

Demostració. Considerem la següent figura, on posem F el punt d'intersecció de les diagonals i H i J les projeccions ortogonals de A i C sobre BD:

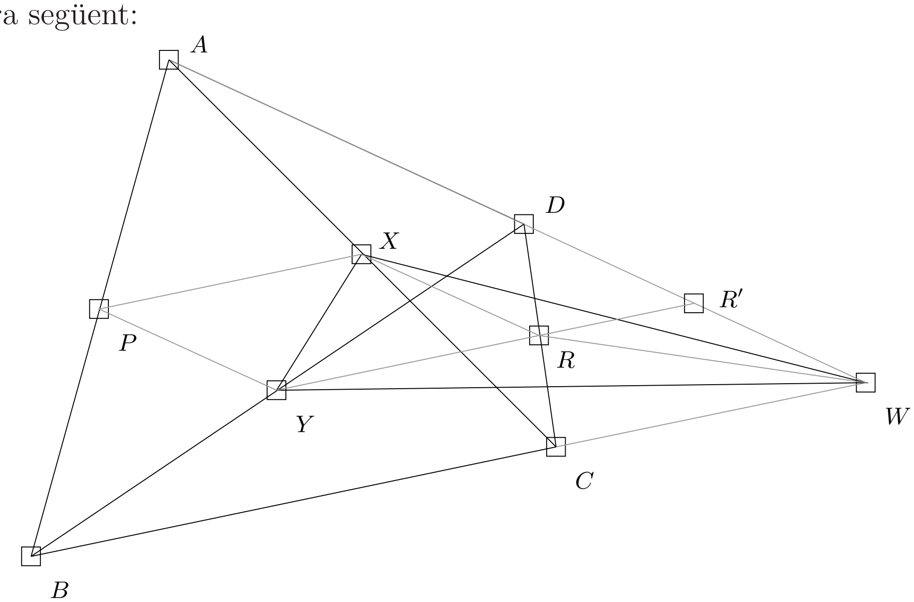


Prova-ho!

Si BD divideix $ABCD$ en triangles ABD i BCD d'igual àrea, aleshores $(AH) = (JC)$; per tant, els triangles $\triangle AHF$ i $\triangle CJF$ són congruents (criteri ACA, per exemple), d'on $(AF) = (FC)$ i obtenim el resultat. El recíproc es segueix de fer el raonament invers. $\square$

Teorema 3.1.4: *En un quadrilàter $ABCD$, sigui W el punt d'intersecció dels costats oposats (extesos) BC i AD; siguin X i Y els punts mitjos de les diagonals AC i BD. Aleshores $(WXY) = \frac{1}{4}(ABCD)$.*

Demostració. Siguin P i R els punts mitjos dels costats AB i CD, com a la figura següent:



Prova-ho!

El segment RY és paral·lel a BC, per tant, si s'extén fins a intersecar DW, biseca aquest costat (basta considerar el triangle DCW). Vist d'una altra forma, tenim que la diagonal RY del quadrilàter $DYWR$ biseca l'altra diagonal DW; pel lema anterior tenim, doncs, que $(RYW) = (RYD)$ i, al seu torn, $(YRD) = \frac{1}{4}(BCD)$. Per tant, $(RYW) = \frac{1}{4}(BCD)$ i, de fet,

$$[RYW] = \frac{1}{4}[BCD];$$

anàlogament obtenim

$$[RWX] = \frac{1}{4}[CDA].$$

Ara,

$$[RXY] = \frac{1}{2}(RXPY)$$

(per Varignon)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(ABDC) \\ &= \frac{1}{4}[CAB] + \frac{1}{4}[BDC] \\ &= \frac{1}{4}[ABC] - \frac{1}{4}[BCD]. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} [WXY] &= [RWX] + [RXY] + [RYW] \\ &= \frac{1}{4}[CDA] + \frac{1}{4}[ABC] - \frac{1}{4}[BCD] + \frac{1}{4}[BCD] \\ &= \frac{1}{4}([CDA] + [ABC]) = \frac{1}{4}(ABCD) \end{aligned}$$

$\square$

Exercici 3.1.2: Proveu que el perímetre del quadrilàter de Varignon és igual a la suma de les diagonals del quadrilàter original.

Exercici 3.1.3: Proveu que la suma dels quadrats dels costats d'un quadrilàter qualsevol és igual a la suma dels quadrats de les diagonals més quatre vegades el quadrat del segment que uneix els punts mitjos de les diagonals.

Exercici 3.1.4: Proveu que, en un paral·lelogram, la suma dels quadrats dels costats és igual a la suma dels quadrats de les diagonals.

Exercici 3.1.5: Un trapeci és un quadrilàter amb un parell de costats oposats paral·lels entre si; un trapeci es diu isòsceles si els dos costats no paral·lels són congruents. Proveu que si un trapeci isòsceles té costats iguals de longitud a, i costats paral·lels de longituds b i c, aleshores les dues diagonals són congruents i, si d es la seva longitud, es té $d^2 = a^2 + bc$.

3.2 Quadrilàters cíclics

Donades longituds a, b, c, d, de manera que cadascuna és menor que la suma de les altres tres, existeix un quadrilàter que les té per longituds dels costats. A més, donat un d'aquests, es pot "estirar" o "xafar" fins a poder tenir els quatre vèrtexos sobre una mateixa circumferència. Es diu, en aquest cas, que el quadrilàter és cíclic, i el suposarem simple i convex.

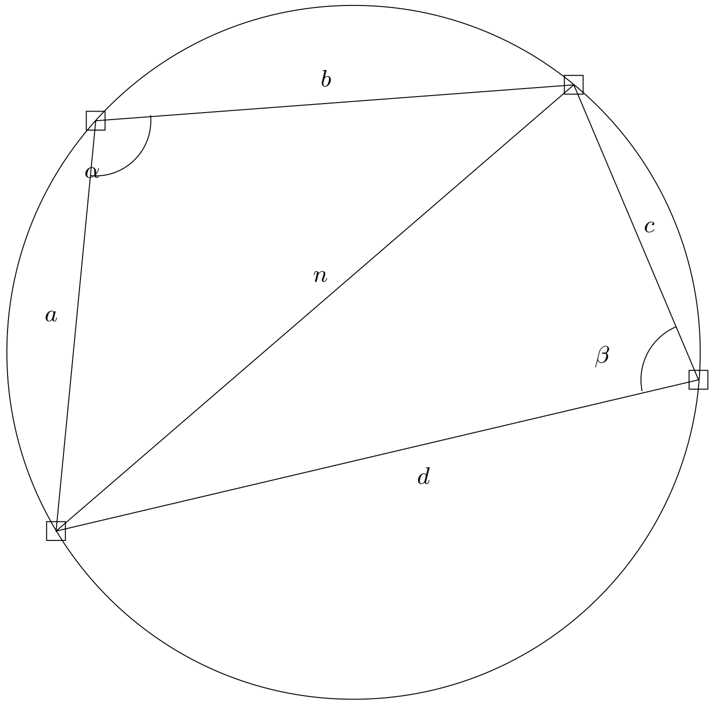
En aquesta secció donarem dos resultats de Brahmagupta sobre quadrilàters cíclics.

En general, els costats d'un quadrilàter no determinen la seva àrea; en el cas dels quadrilàters cíclics, si que ho fan:

Teorema 3.2.1: *Si un quadrilàter cíclic té costats a, b, c, d, posant s el seu semiperímetre, $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, i K l'àrea del quadrilàter, es té*

$$K^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d).$$

Demostració. Sigui n la longitud d'una diagonal i α i β els angles en els vèrtexos no adjacents a la diagonal:



Prova-ho!

Aleshores $\alpha + \beta = 180^{\mathrm{o}}$, d'on

$$\cos\alpha = -\cos\beta, \qquad \sin\alpha = \sin\beta.$$

Aplicant el teorema del cosinus als dos triangles, tenim

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = n^2, \\ c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta = n^2, \\ c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha = n^2 \end{aligned}$$

d'on

$$2(ab+cd)\cos\alpha = a^2 + b^2 - c^2 - d^2.$$

Per altra banda, tenim que l'àrea del quadrilàter és

$$K = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha,$$

d'on

$$2(ab+cd)\sin\alpha = 4K.$$

Elevant al quadrat les dues expressions i sumant-les, obtenim

$$4(ab+cd)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16K^2,$$

d'on, i aplicant reiteradament que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ tenim:

$$\begin{aligned}
16K^2 &= 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \\
&= \big(2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\big)\big(2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)\big) \\
&= (a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2)(c^2+2cd+d^2-a^2+2ab-b^2) \\
&= \big((a+b)^2-(c-d)^2\big)\big((c+d)^2-(a-b)^2\big) \\
&= \big((a+b+c-d)(a+b-c+d)\big)\big((c+d+a-b)(c+d-a+b)\big) \\
&= (2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a),
\end{aligned}$$

d'on

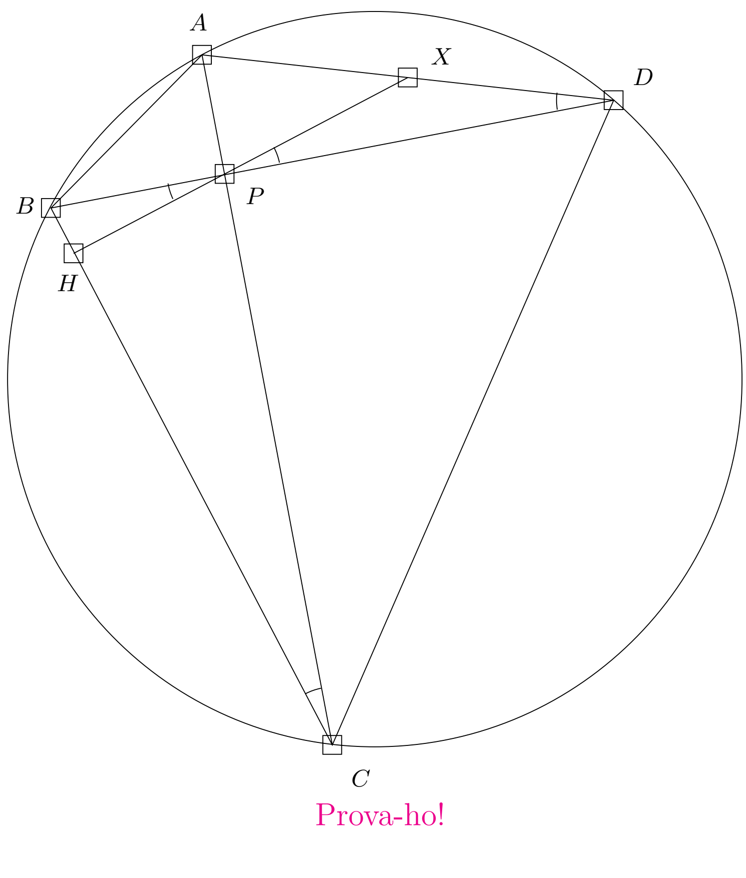
$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

$\square$

En quadrilàters cíclics tenim un altre resultat sobre bisecció:

Teorema 3.2.2: *Si un quadrilàter cíclic té diagonals perpendiculars, sigui P el seu punt d'intersecció, aleshores la perpendicular per P a qualsevol costat biseca el costat oposat.*

Demostració. Considerem la següent figura:



Prova-ho!

Es té que $\angle XPD = \angle BPH$ per ser oposats pel vèrtex; ara $\angle BPH = \angle BCP = \angle BCA$ per estar limitats per rectes ortogonals; però també (per arc capaç) $\angle BCA = \angle BDA$. Per tant, $\angle XPD = \angle XDP$ i $\triangle XPD$ és isósceles amb $(XD) = (XP)$. Anàlogament, el triangle $\triangle AXP$ és també isósceles, amb $(AX) = (XP)$. En resum, $(AX) = (XP) = (XD)$. $\square$

Exercici 3.2.1: Proveu que si un quadrilàter cíclic amb costats a, b, c, d es pot circumscriure a una circumferència, aleshores la seva àrea K ve donada per

$$K^2 = abcd.$$

Exercici 3.2.2: Proveu que si un quadrilàter cíclic amb costats a, b, c, d s'inscriu en una circumferència de radi R, aleshores la seva àrea K ve donada per

$$K^2 = \frac{(bc+ad)(ca+bd)(ab+cd)}{16R^2}.$$

Indicació: Haureu de fer servir el teorema de Ptolomeu.

Exercici 3.2.3: Considerem costats oposats d'un quadrilàter cíclic que s'intersequen en V i W. Proveu que els bisectors dels angles en V i W són perpendiculars.

Exercici 3.2.4: Proveu que si un quadrilàter s'inscriu en una circumferència, el producte de les distàncies d'un punt sobre la circumferència a dos costats oposats és igual al producte de les distàncies d'ell mateix als altres dos costats oposats i també al producte de les distàncies del mateix punt a les diagonals.

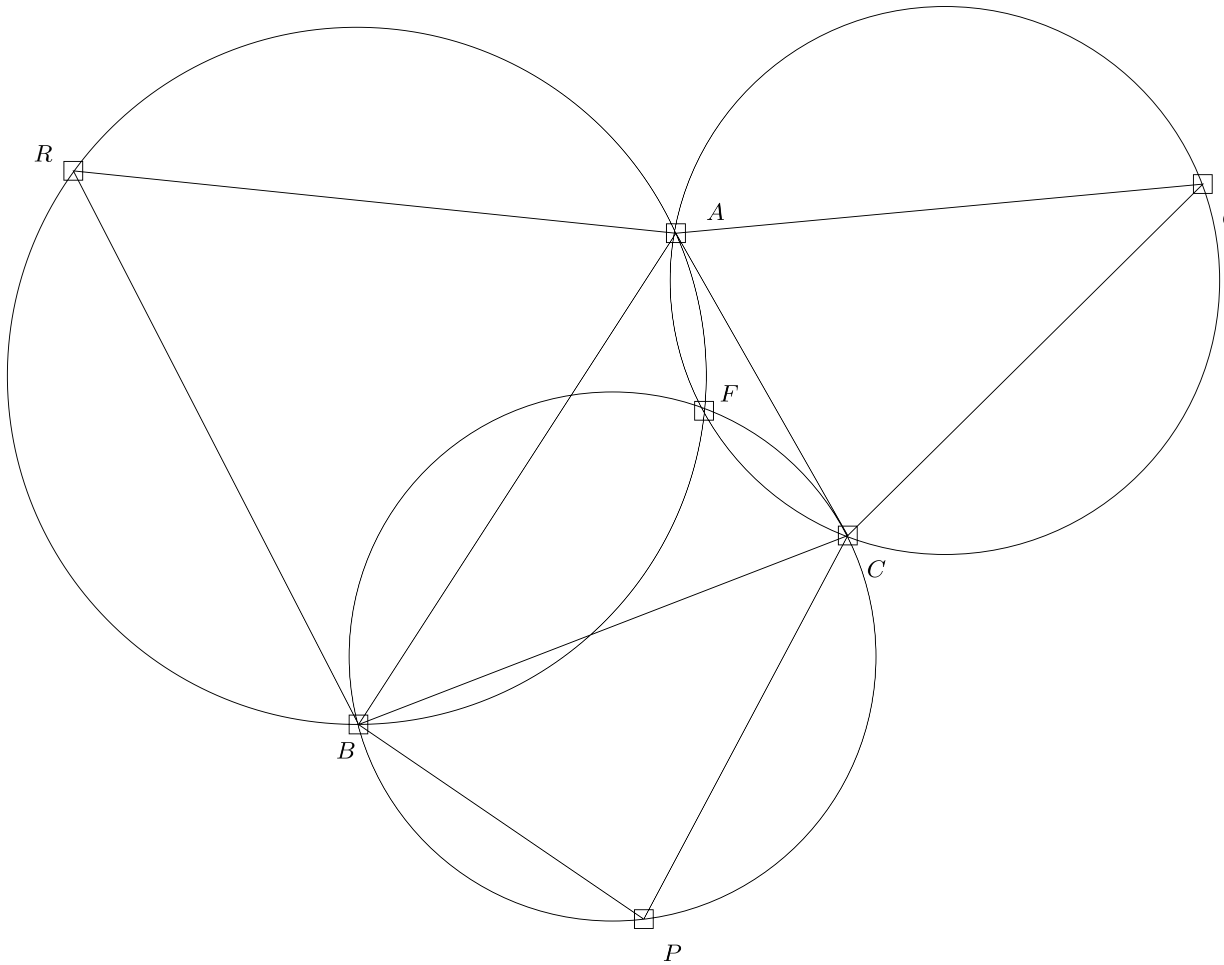
3.3 Triangles de Napoleó

En aquesta secció considerarem els polígons que s'obtenen aixecant triangles sobre els costats d'un altre triangle.

Donat un triangle $\triangle ABC$, direm que el triangle $\triangle PBC$ s'aixeca externament (resp. internament) sobre el costat BC si el punt P es troba sobre el semipla limitat per BC (extés) on no es troba A (resp. si es troba A).

Teorema 3.3.1: *Siguin triangles aixecats externament sobre els costats d'un altre triangle, de manera que els tres vèrtexos fora del triangle original sumen un angle de* 180°. *Aleshores els tres circumcercles dels tres triangles són concurrents.*

Demostració. Considerem la figura següent:



Els circumcercles de $\triangle PBC$ i $\triangle QAC$ tenen el punt C en comú; com no poden ser tangents, també tenen un altra punt en comú que diem F. Aleshores els quadrilàters $BFCP$ i $CFAQ$ són cíclics i es té que

$$\angle BFC = 180^{\circ} - \angle BPC = 180^{\circ} - \angle P$$
$$\angle CFA = 180^{\circ} - \angle CQA = 180^{\circ} - \angle Q.$$

Per tant,

$$\angle AFB = 360^{\circ} - (\angle BFC + \angle CFA) = \angle P + \angle Q = 180^{\circ} - \angle R.$$

Per tant, F pertany al cicumcercle de $\triangle RBA$. $\square$

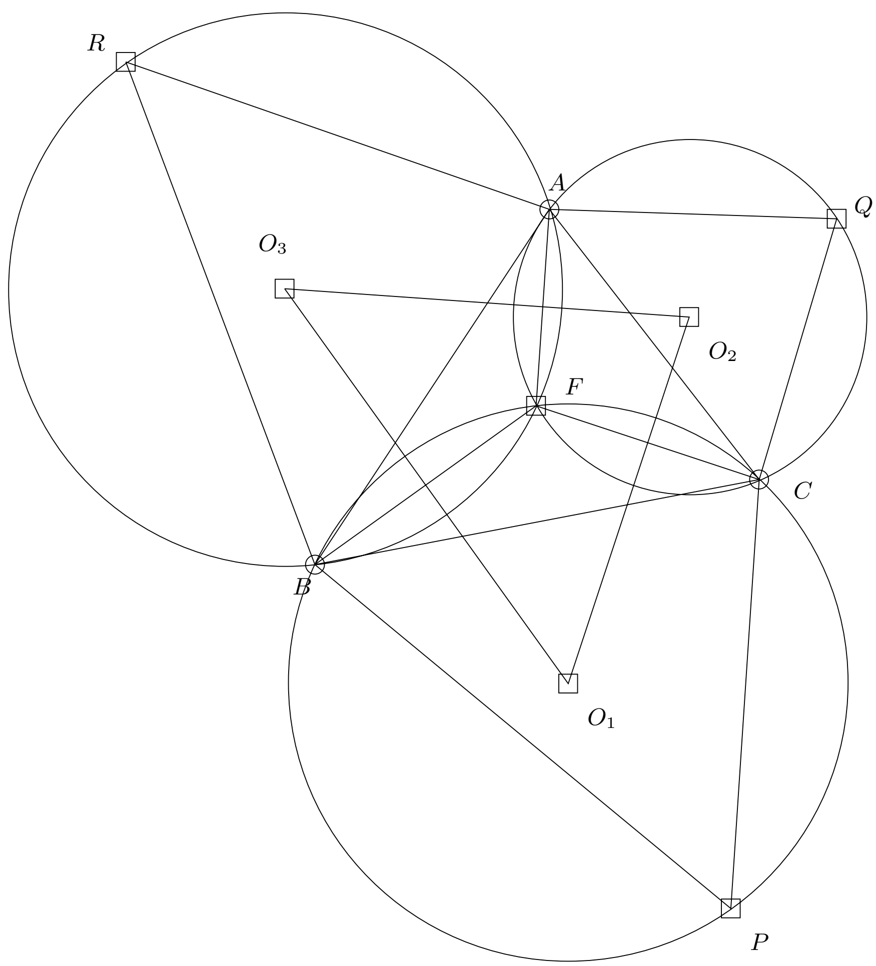
Corol·lari 3.3.2: *Si els vèrtexos A, B, C d'un triangle es troben, respectivament, sobre els costats QR, RP i PQ d'un altre triangle $\triangle PQR$, aleshores els tres circumcercles dels triangles $\triangle CBP$, $\triangle ACQ$ i $\triangle BAR$ són concurrents.*

Corol·lari 3.3.3: *Si triangles semblants $\triangle PCB$, $\triangle CQA$ i $\triangle BAR$ s'aixequen externament sobre els costats d'un triangle $\triangle ABC$, aleshores els seus tres circumcercles són concurrents.*

Exercici 3.3.1: Proveu aquests dos corol·laris.

Teorema 3.3.4: *Amb les mateixes hipòtesi del corol·lari anterior, es té que els circumcentres dels tres triangles aixecats formen un triangle semblant als triangles aixecats.*

Demostració. Fixem-nos en la figura següent, on hem posat els circumcentres O_1, O_2 i O_3.



Prova-ho!

La recta AF és perpendicular a la recta O_2O_3 (una manera de veure-ho és veient que A i F són punts de l'eix radical dels dos circumcercles). Anàlogament, O_1O_3 és perpendicular a BF i O_1O_2 ho és a CF. Per tant, l'angle en O_1 de $\triangle O_1O_2O_3$ és igual a $\angle O_1 = 180^{\text{o}} - \angle BFC = \angle P$. Anàlogament $\angle O_2 = \angle Q$ i $\angle O_3 = \angle R$. $\square$

Com a conseqüència directa d'aquest darrer resultat s'obté el següent teorema, que (segons la llegenda) és original de Napoleó (si, el del braç a l'estómac i el barret de paper de diari).

Teorema 3.3.5 (Teorema de Napoleó): *Si s'aixequen externament triangles equilàters sobre els costats d'un triangle qualsevol, aleshores els seus (circum)centres són vèrtexos d'un triangle equilàter.*

Exercici 3.3.2: Si s'aixequen externament quadrats sobre dos costats d'un triangle, aleshores els seus circumcercles i la circumferència que té per diàmetre el tercer costat són concurrents; a més, els centres d'aquestes tres circumferències formen un triangle rectangle isósceles.

Exercici 3.3.3: Amb les notacions d'aquesta secció, proveu que:

1. Les rectes PO_1, QO_2 i RO_3 passen pel circumcentre de $\triangle ABC$.
2. Les rectes AO_1, BO_2 i CO_3 són concurrents.
3. Les rectes AB, BQ i CR són concurrents en F, i formen angles de 60^{o}.

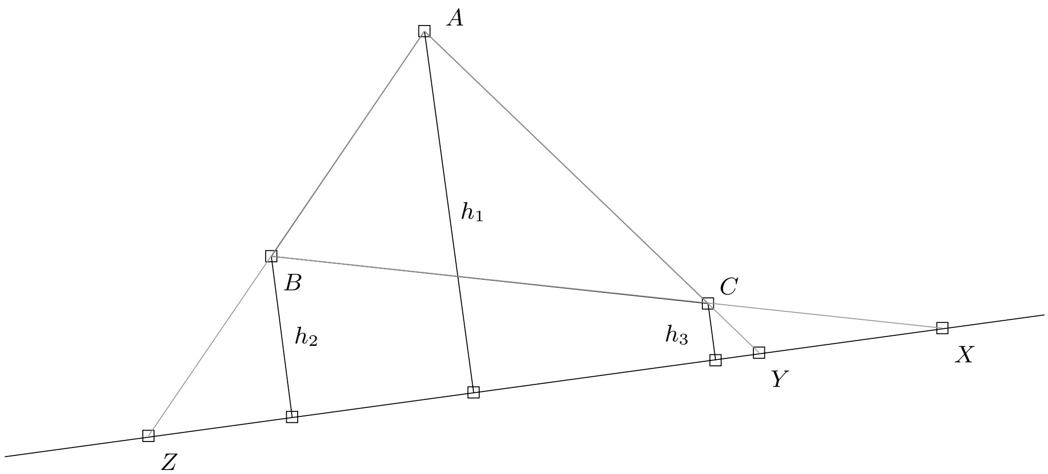
3.4 El Teorema de Menelao

Aquesta secció és la primera d'un conjunt de tres seccions dedicades a tres teoremes clàssics sobre concurrència i colinealitat.

Teorema 3.4.1: *Siguin X, Y, Z punts sobre els costats (extesos) BC, CA i AB d'un triangle $\triangle ABC$. Aleshores, els tres punts X, Y, Z són colineals si, i només si,*

$$\frac{BX}{CX}\frac{CY}{AY}\frac{AZ}{BZ} = 1.$$

Demostració. Considerem la figura següent:



Prova-ho!

Degut a que les altures dibuixades són paral·leles, es té:

$$\frac{(BX)}{(CX)} = \frac{h_2}{h_3}, \qquad \frac{(CY)}{(AY)} = \frac{h_2}{h_3}, \qquad \frac{(AZ)}{(BZ)} = \frac{h_2}{h_3}.$$

Multiplicant aquestes tres igualtats s'obté el resultat desitjat. □

Observeu que aquest resultat és "dual" del teorema de Ceva.

Exercici 3.4.1: Proveu que els bisectors exteriors d'un triangle pels tres vèrtexos intersequen els respectius costats oposats (extesos) en tres punts alineats.

Exercici 3.4.2: Proveu que els tres punts determinats per l'intersecció de dos bisectors interiors amb els respectius costats oposats i l'intersecció del bisector exterior pel vèrtex restant amb el costat oposat són tres punts alineats.

3.5 El Teorema de Pappus

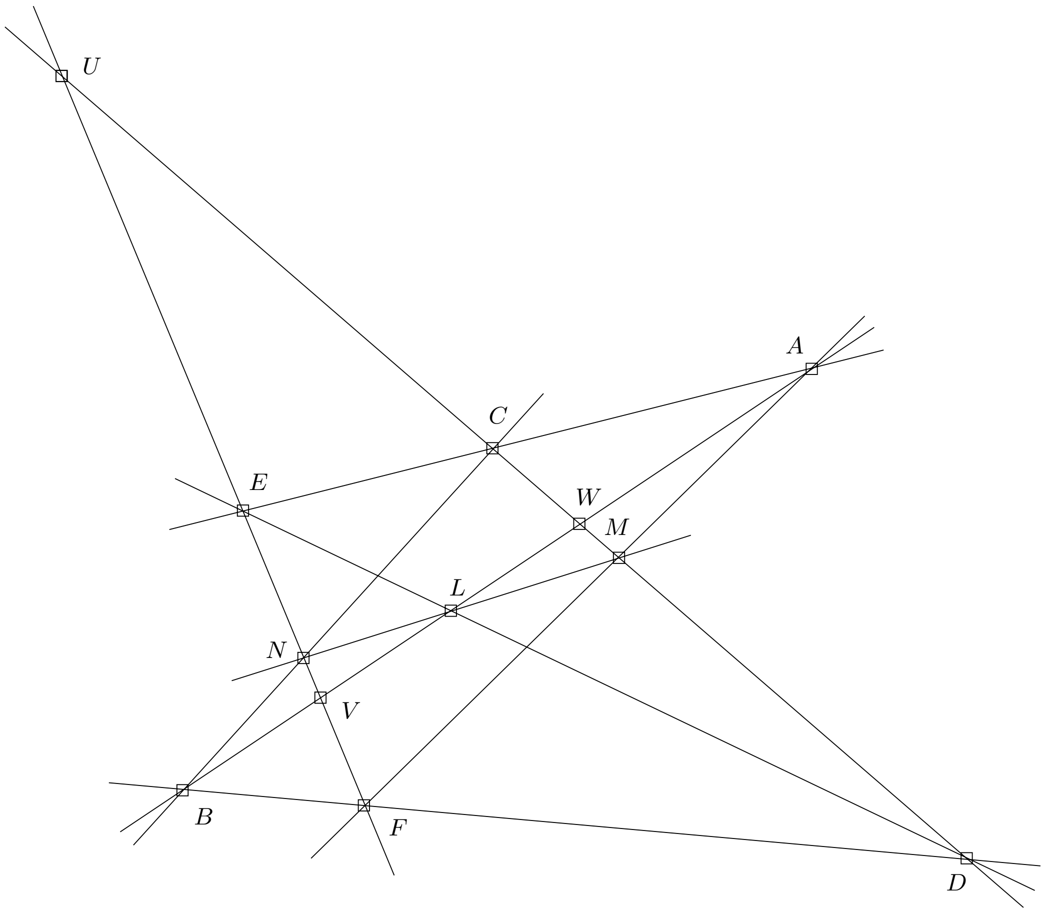
Donem aquí un resultat especialment interessant, en el sentit que no fa referència a qüestions mètriques i es pot enunciar fent servir únicament el concepte d'incidència (d'un punt amb una recta).

Teorema 3.5.1: *Siguin A, C, E i B, D, F dues ternes de punt alineats. Considerem els punts d'intersecció de rectes determinats per aquests punts:*

$$L = AB \cdot DE,$$
$$M = CD \cdot FA,$$
$$N = EF \cdot BC.$$

Aleshores els tres punts L, M, N estan alineats.

Demostració. Considerem la figura següent:



Prova-ho!

Hem considerat els punts:

$$U = EF \cdot CD,$$
$$V = AB \cdot EF,$$
$$W = AB \cdot CD.$$

Si considerem el triangle $\triangle UVW$, les ternes de punts (L, D, E), (A, M, F), (B, C, N), (A, C, E) i (B, D, F) es troben en les hipòtesis del teorema de

Menelao. Per tant, es tenen les igualtats:

$$\begin{aligned}
\frac{(VL)}{(LW)}\frac{(WD)}{(DU)}\frac{(UE)}{(EV)} &= 1,\\
\frac{(VA)}{(AW)}\frac{(WM)}{(MU)}\frac{(UF)}{(FV)} &= 1,\\
\frac{(VB)}{(BW)}\frac{(WC)}{(CU)}\frac{(UN)}{(NV)} &= 1,\\
\frac{(VA)}{(AW)}\frac{(WC)}{(CU)}\frac{(UE)}{(EV)} &= 1,\\
\frac{(VB)}{(BW)}\frac{(WD)}{(DU)}\frac{(UF)}{(FV)} &= 1.
\end{aligned}$$

Multiplicant les tres primeres i dividint el resultat pel producte de les dues darreres, s'obté:

$$\frac{(VL)}{(LW)}\frac{(WM)}{(MU)}\frac{(UN)}{(NV)} = 1,$$

d'on es té que els punts L, M, N estan alineats. □

Aquest resultat es pot interpretar en termes de polígons: Sigui $ABCDEF$ un hexàgon tal que vèrtexos alternats estan alineats. Aleshores els punts d'intersecció de costats oposats estan alineats.

Exercici 3.5.1: Siguin A, C, E i B, D, F dues ternes de punts alineats. Proveu que si la recta AB és paral·lela a la recta DE i la recta CD és paral·lela a la recta FA, aleshores la recta EF és paral·lela a la recta BC.

Exercici 3.5.2: Siguin A, B, D, E, M, N punts tals que les rectes AE, DM, NB són concurrents, i les rectes AM, DB, NE són també concurrents. Quina propietat tenen les rectes AB, DE, NM?

Exercici 3.5.3: Sigui $AEBD$ una paral·lelogram, C un punt sobre la recta AE i F un punt sobre la recta BD. Definim:

$$\begin{aligned}
M &= CD \cdot FA,\\
N &= EF \cdot BC,\\
P &= MN \cdot DA,\\
Q &= MN \cdot EB.
\end{aligned}$$

Proveu que $(AP) = (QB)$.

Exercici 3.5.4: Proveu que si un hexàgon $ABCDEF$ té els costats oposats BC i EF paral·lels a la diagonal AD, i els costats oposats CD i FA paral·lels a la diagonal BE, aleshores el restant parell de costats oposats, DE i AB són paral·lels a la restant diagonal, CD; a més, els triangles formats per vèrtexos alternats comparteixen centroide.

3.6 El Teorema de Desargues

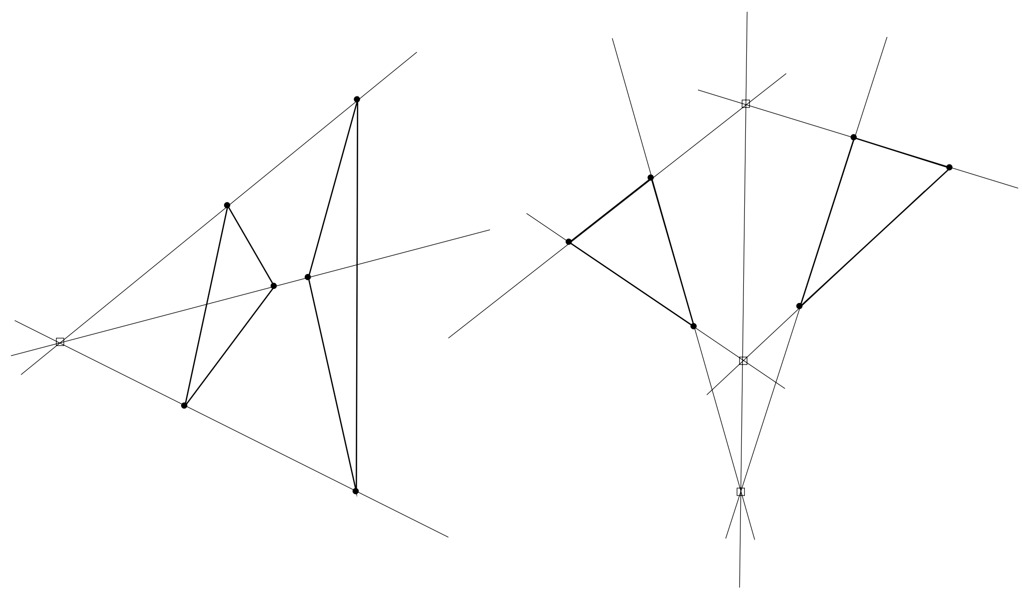
Aquest teorema presenta les mateixes característiques que el teorema de Pappus; és més, alguna de les axiomàtiques existents per a la construcció de la geometria el prenen com a axioma.

Dos polígons:

$$\mathcal{P} = P_1 P_2 \dots P_n,$$
$$\mathcal{P}' = P'_1 P'_2 \dots P'_n$$

es diu que estan en perspectiva respecte d'un punt O si les rectes que uneixen vèrtexos corresponents, $P_i P'_i$, són totes elles concurrents en O. Anàlogament, es diu que estan en perspectiva respecte d'una recta o si els punts d'intersecció de costats corresponents, $P_i P_{i+1} \cdot P'_i P'_{i+1}$ estan tots ells sobre la recta o.

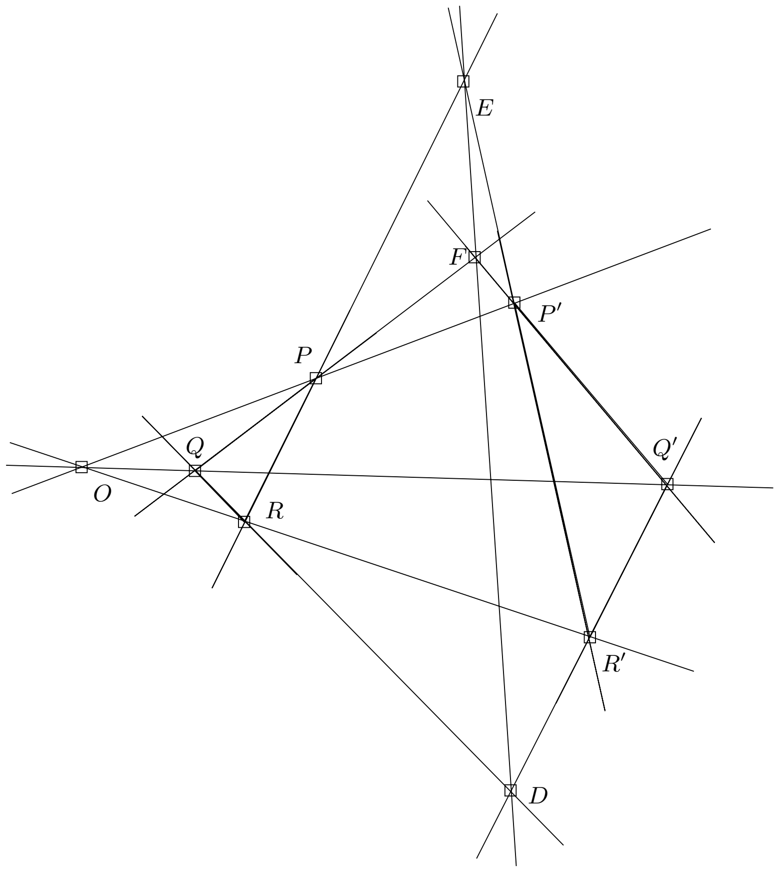
Aquí tenim un exemple de triangles en perspectiva respecte d'un punt i d'una recta, respectivament.



Prova-ho!

Teorema 3.6.1 (Teorema de Desargues): *Dos triangles estan en perspectiva respecte d'un punt si, i només si, estan en perspectiva respecte d'una recta.*

Demostració. Anem a provar la primera implicació. Considerem la figura següent.



Prova-ho!

Siguin D, E, F els punts que volem veure que estan alineats:

$$\begin{aligned} D &= QR \cdot Q'R', \\ E &= PR \cdot P'R', \\ F &= PQ \cdot P'Q'. \end{aligned}$$

Aleshores, sobre el triangle $\triangle OQR$ es tenen els punts D, R', Q' sobre els costats i alineats; per tant,

$$\frac{(QD)}{(DR)}\frac{(RR')}{(R'O)}\frac{(OQ')}{(Q'Q)} = 1.$$

Analogament, amb el triangle $\triangle ORP$ i els punts E, P', R', es té

$$\frac{(RE)}{(EP)}\frac{(PP')}{(P'O)}\frac{(OR')}{(R'R)} = 1.$$

Finalment, amb el triangle $\triangle OPQ$ i els punts F, Q', P', obtenim

$$\frac{(PF)}{(FQ)}\frac{(QQ')}{(Q'O)}\frac{(OP')}{(P'P)} = 1.$$

Multiplicant les tres igualtats, obtenim:

$$\frac{(QD)}{(DR)}\frac{(RE)}{(EP)}\frac{(PF)}{(FQ)} = 1,$$

d'on es té que els punts D, E, F, sobre els costats del triangle $\triangle PQR$, estan alineats.

Per tal de provar el recíproc, considerem els punts

$$\begin{aligned} D &= QR \cdot Q'R', \\ E &= PR \cdot P'R', \\ F &= PQ \cdot P'Q', \end{aligned}$$

que, per hipòtesi estan alineats. Definim $O = PP' \cdot RR'$ i volem veure que O, Q, Q' són punts alineats. Els triangles $\triangle FPP'$ i $\triangle DRR'$ estan en perspectiva respecte del punt E. Per la implicació ja provada del teorema, es té que també estan en perspectiva respecte d'una recta; per tant, els punts $FP \cdot DR$, $FP' \cdot DR'$, $PP' \cdot RR'$ estan alineats, però nomem que

$$\begin{aligned} FP &= PQ, & \qquad DR &= QR, \\ FP' &= P'Q' & \qquad DR' &= Q'R'. \end{aligned}$$

Per tant, els punts que hem vist que estan alineats són:

$$\begin{aligned} PQ \cdot QR &= Q, \\ P'Q' \cdot Q'R' &= Q', \\ PP' \cdot RR' &= O. \end{aligned}$$

I obtenim el resultat. $\square$

Exercici 3.6.1: Proveu que si dos triangles estan en perspectiva respecte d'un punt i dos parells de costats corresponents són paral·lels, aleshores el tercer parell de costats corresponents són també paral·lels.

Exercici 3.6.2: Amb les notacions de la prova del teorema de Desargues, digueu quina propietat tenen els pentàgons $DFP'OR$ i $EPQQ'R'$. Trobeu més pentàgons amb aquesta mateixa propietat.

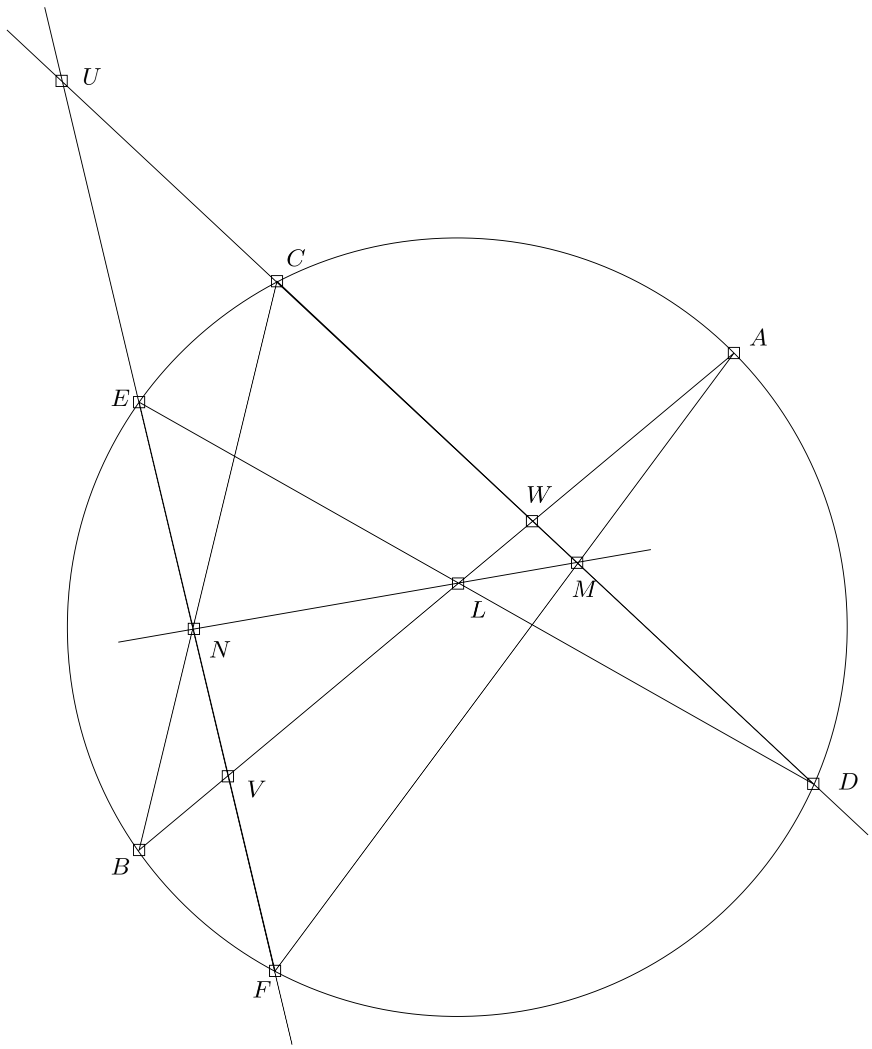
Exercici 3.6.3: Donades dues rectes i un punt P exterior a les dues, trobeu la recta que passa per P i és concurrent amb les rectes donades sense trobar el punt d'intersecció de les mateixes.

3.7 El teorema de Pascal

L'objectiu d'aquesta secció és provar el teorema de Pascal i alguna de les seves conseqüències.

Teorema 3.7.1 (Teorema de Pascal): *Si els vèrtexos d'un hexàgon es troben sobre una circumferència, els punts d'intersecció de costats oposats estan alineats.*

Demostració. Considerem la figura següent.



Prova-ho!

Els punts d'intersecció de costats oposats són:

$$\begin{aligned} L &= AB \cdot DE, \\ M &= CD \cdot FA, \\ N &= BC \cdot EF. \end{aligned}$$

Considerem els punts auxiliars

$$\begin{aligned} U &= CD \cdot EF, \\ V &= AB \cdot EF, \\ W &= CD \cdot AB. \end{aligned}$$

Sobre el triangle $\triangle UVW$, les ternes de punts (L, D, E), (A, M, F) i (B, C, N) impliquen les igualtats:

$$\begin{aligned} \frac{(VL)}{(LW)}\frac{(WD)}{(DU)}\frac{(UE)}{(EV)} &= 1, \\ \frac{(VA)}{(AW)}\frac{(WM)}{(MU)}\frac{(UF)}{(FV)} &= 1, \\ \frac{(VB)}{(BW)}\frac{(WC)}{(CU)}\frac{(UN)}{(NV)} &= 1. \end{aligned}$$

I del producte d'aquestes se'n dedueix que:

$$\frac{(VL)}{(LW)}\frac{(WM)}{(MU)}\frac{(UN)}{(NV)}\frac{(UE)(UF)}{(UC)(UD)}\frac{(VA)(VB)}{(VE)(VF)}\frac{(WC)(WD)}{(WA)(WB)} = 1.$$

Notem que $(UE)(UF) = (UC)(UD)$ per ser la potència de U respecte de la circumferència; el mateix passa amb V i W: $(VA)(VB) = (VE)(VF)$ i $(WC)(WD) = (WA)(WB)$. Per tant,

$$\frac{(VL)}{(LW)}\frac{(WM)}{(MU)}\frac{(UN)}{(NV)} = 1,$$

i obtenim el resultat. □

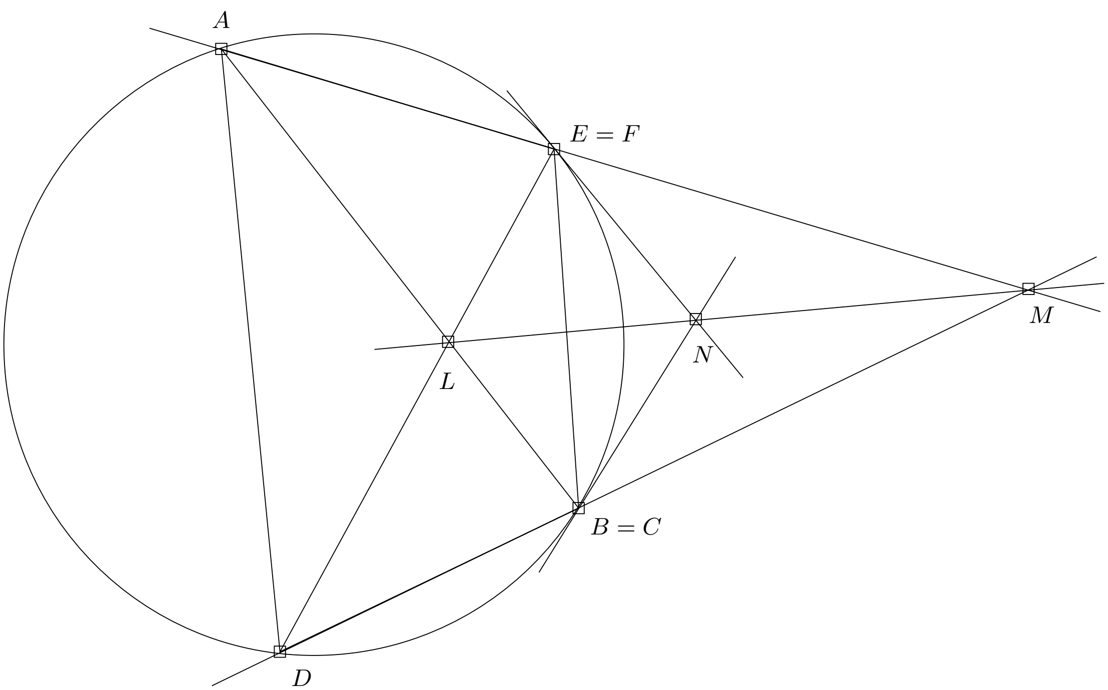
Essencialment, el teorema de Pascal que hem donat (vèrtexos d'un hexàgon sobre una circumferència) i la interpretació del teorema de Pappus que hem donat en termes d'hexàgons (vèrtexos d'un hexàgon sobre dues rectes) són casos particular del que es coneix també com el teorema de Pascal, on els vèrtexos d'un hexàgon es consideren sobre una secció cònica qualsevol.

Teorema 3.7.2 (Teorema de Pascal): *En un hexàgon, els punts d'intersecció de costats oposats estan alineats si, i només si, els vèrtexos de l'hexàgon es troben sobre una cònica (que pot ser degenerada).*

Aquest resultat es pot fer servir per trobar propietats de quadrilàters i pentàgons. Per exemple, podem pensar un pentàgon $ABCDE$ sobre una circumferència com un hexàgon $ABCDEF$ on F i E s'han confós en un únic punt; en tal cas, el que seria el costat EF esdevé la tangent a la circumferència pel vèrtex E.

Teorema 3.7.3: *En un quadrilàter cíclic $AEBD$, els punts d'intersecció de les diagonals, el punts d'intersecció dels costats oposats AE i BD i el punt d'intersecció de les tangents per E i B estan alineats.*

Demostració. En la figura següent hem considerat el quadrilàter com una degeneració d'un hexàgon.



Prova-ho!

El resultat surt ara del teorema de Pascal. □

Exercici 3.7.1: Proveu que si 5 dels vèrtexos d'un hexàgon es troben a sobre d'una circumferència i els 3 parells de costats oposats s'intersequen a punts alineats, aleshores els sisè vèrtex es troba també sobre la circumferència.

Exercici 3.7.2: Proveu que en un quadrilàter cíclic $ABCE$ sense costats paral·lels, les tangents per A i C s'intersequen a la recta que uneix $AB \cdot CD$ i $BC \cdot EA$.