Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 3 - MS650 - Métodos Matemáticos II, 11 de setembro de 2023.

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

[Exercício 11] Neste problema, $H_n(x)$ é o polinômio de Hermite de grau n, $H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{\frac{x^2}{2}} \mathcal{D}_x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, com $\mathcal{D}_x = x - \frac{d}{dx}$. A Transformada de Fourier (TF) é dada por $\mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$. Caso use alguma propriedade conhecida das TF, não é necessário prová-la, mas especifique claramente qual está usando.

1. (3 Pontos) Mostre que o operador $\mathcal{D}_x$ satisfaz a identidade $\mathcal{F}[\mathcal{D}_x^n f(x)] = i^n \mathcal{D}_k^n \mathcal{F}[f(x)]$, sendo $\mathcal{D}_k = k - \frac{d}{dk}$.

   Solução. *Notem que*

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}_x g] = \mathcal{F}[xg(x) - g'(x)] = \mathcal{F}[xg(x)] - \mathcal{F}[g'(x)] = -i\frac{d}{dk}\mathcal{F}[g(x)] + ik\mathcal{F}[g(x)] = i\mathcal{D}_k \mathcal{F}[g(x)],$$

   onde as propriedades da derivada foram usadas. A prova dessas propriedades é muito simples, está na seção 3.2 do livro (Eqs. 3.8 e 3.9), mas não era necessário prová-las. O resultado final segue de uma indução simples

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}_x^{n+1} f(x)] = \mathcal{F}[\mathcal{D}_x(\underbrace{\mathcal{D}_x^n f(x)}_{g(x)})] = i\mathcal{D}_k \underbrace{\mathcal{F}[\mathcal{D}_x^n f(x)]} = i\mathcal{D}_k \left(\underbrace{i^n \mathcal{D}_k^n \mathcal{F}[f(x)]} \right) = i^{n+1} \mathcal{D}_k^{n+1} \mathcal{F}[f(x)].$$

   hipótese indutiva

2. (3 Pontos) Mostre que $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = e^{-\frac{k^2}{2}}$, *i.e.*, a função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é invariante pela ação da TF.

   Solução. *Há diversas maneiras de se mostrar isso. A mais direta foi a feita em sala, calcular explicitamente a TF*

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} + ikx} dx = \frac{e^{-\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-ik)^2} dx}_{\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

   Curiosamente (ou não), é possível mostrar esse resultado **sem** *fazer a integral "gauziana", mas explorando uma típica construção "Feynmaniana". Vejam como. Considerem a função $f(x) = e^{-ax^2}$. Notem que $f'(x) = -2axf(x)$. A propriedade da derivada nos diz que $\mathcal{F}[f'(x)] = -ikF(k)$ e que $\mathcal{F}[xf(x)] = -iF'(k)$. Porém, para essa nossa função $f(x)$ específica, teremos*

$$-2aF'(k) = kF(k),$$

   cuja solução é $F(k) = Ce^{-\frac{k^2}{4a}}$. A constante C deve ser determinada a partir da identidade de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{2a}} dk.$$

   Fazendo-se a mudança de variável $k = 2as$ na segunda integral, ficamos com

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = 2aC^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2as^2} ds,$$

   de onde temos $C = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, sem precisar calcular as integrais. Comparando-se nossa $f(x) = e^{-ax^2}$ com sua TF $F(k) = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}$, vemos que ela será invariante (autofunção com autovalor 1) se e somente se $a = \frac{1}{2}$.
   Talvez alguém já tenha notado, mas essa construção nos permite calcular a integral gauziana. Como? Só lembrar que

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

   e usar as nossas funções. Esta é a n-ésima maneira de se calcular essa integral fundamental. Guarde-a em seu arsenal....

3. (2 Pontos)Mostre que $\psi_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ é autofunção da TF com autovalor i^n, ou seja, $\mathcal{F}[\psi_n(x)] = i^n\psi_n(k)$.

Solução. *As funções $\psi_n(x)$ são também chamadas de funções de Hermite e são as autofunções da Equação de Schroedinger para o (onipresente!) oscilador harmônico. Da definição dos polinômios de Hermite, temos que $\psi_n(x) = \mathcal{D}_x^n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$. Usando os resultados dos itens 1 e 2*

$$\mathcal{F}[\psi_n(x)] = \mathcal{F}\left[\mathcal{D}_x^n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right] = i^n\mathcal{D}_k^n\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = i^n\mathcal{D}_k^n\left(e^{-\frac{k^2}{2}}\right) = i^n\psi_n(k).$$

Vejam o item seguinte para mais comentários.

4. (2 Pontos) Dois colegas discutem veementemente o resultado desse exercício. P afirma, corretamente, que as autofunções ψ_n são um conjunto completo para $L^2(\mathbb{R})$, de fato, são uma base para esse espaço. Por outro lado, M, exímio usuário do Wolfram Alpha, diz que encontrou uma outra autofunção diferente, especificamente esta

que não está no conjunto completo dos ψ_n do item anterior. Os dois não conseguem resolver este impasse: como é possível ter uma outra autofunção diferente, que não está no conjunto dos ψ_n? Ajude a resolver o impasse e restabelecer a paz na turma, explique o que está acontecendo.

Solução. *As autofunções $\psi_n(x)$ da TF efetivamente são uma base para $L^2(\mathbb{R})$, a base na qual a TF comporta-se como uma transformação "diagonal", quer dizer a TF de cada elemento ψ_n da base é sempre proporcional a ψ_n. A analogia com autovetores de matrizes é perfeita aqui.*

Como é possível então que exista uma "outra" autofunção diferente? Notem os autovalores da TF. São apenas quatro: $1, i, -1, -i$. Ao mesmo tempo, são infinitas autofunções. É claro que as autofunções são degeneradas, com multiplicidade geométrica "infinita", os autovalores estão associados a subespaços ortogonais de dimensão infinita de $L^2(\mathbb{R})$. A função sech $\sqrt{\frac{\pi}{2}}x = \frac{1}{\cosh\sqrt{\frac{\pi}{2}}x}$ tem autovalor 1[1] e, portanto, pertence ao subespaço gerado pelas autofunções ψ_{4k}, com $k = 0, 1, 2, \ldots$. Não há nenhum impasse, pois poderemos sempre expandir

$$\frac{1}{\cosh\sqrt{\frac{\pi}{2}}x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\psi_{4k}(x).$$

A autofunção do Mr. M, na prática, é uma combinação linear dos ψ_{4k}. Para acertar este item, basta identificar que há quatro subespaços (os quatro de dimensão infinita) e que por "pura sorte", Mr. M encontrou uma função que "mora" num desses subespaços, no caso o de autovalor 1.

Mas é claro que podemos ir além nessa resposta. É fácil ver que a autofunção do Mr. M é ortogonal aos subespaços associados aos autovalores i e $-i$, respectivamente, $n = 4k+1$ e $n = 4k+3$, isso é facilmente verificável da paridade dos polinômios de Hermite. Mas a ortogonalidade ao subespaço com autovalor -1 é muito mais difícil de se mostrar! Na prática, deve-se mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{4n+2}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\cosh\sqrt{\frac{\pi}{2}}x}dx = 0, \quad \text{para todo } n,$$

e essa integral parece **extremamente** *difícil. Qualquer mínimo progresso nela valerá um $\epsilon > 1$ na nota. Sim, não errei, é maior que 1 mesmo, não que zero. Se alguem conhecer a misteriosa Cleo, pode pedir sua ajuda!*

[1] Clique aqui para verificar isso no Wolfram Alpha. A integral dessa TF pode ser calculada em termos da função Beta, veja por exemplo aqui. Outro exemplo de autofunção do tipo Mr. M é esta.

No nosso caso, isso é só um detalhe, a autofunção do Mr. M nos garante que essa integral é zero! Notem que não é **uma integral**, *são infinitas! Uma para cada n. Este tipo de resultado, obtido de forma meio inesperada a partir de um problema "ortogonal" é comum (Serendipity!). Estou convencido que quanto maior for seu "arsenal" de resultados desse tipo, (muito) melhor para você. Um exemplo curioso relacionado a este tipo de conhecimento está aqui, com um personagem famoso.*

Neste caso presente, nós temos a autofunção que Mr. M descobriu e perguntamos como é sua expansão em termos das funções de Hermite $\psi_n(x)$. Poderíamos ter feito ao contrário, começarmos de um certo subespaço e "construir" uma nova autofunção. Vamos, por exemplo, construir uma com autovalor i. Ela deve ser uma combinação das autofunções $\psi_{4n+1}(x)$. Quer dizer, deve ser alguma função do tipo

$$f(x) = \left(\sum_k a_k H_{4k+1}(x)\right) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

para certos coeficientes a_k. **Qualquer** *$f(x)$ desse tipo será autofunção da TF com autovalor i. Vamos construir uma com expressão fechada. A função geratriz dos polinômios de Hermite é*

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

Fazendo-se $t \to -t$ temos

$$e^{-2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

Subtraindo-se as duas expressões, ficamos com

$$e^{-t^2}\sinh 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} H_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Agora, fazendo-se $t \to it$ essa expressão, ficamos com

$$e^{t^2}\sin 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Somando-se as duas últimas expressões temos

$$e^{-t^2}\sinh 2xt + e^{t^2}\sin 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} H_{4n+1}(x)\frac{t^{4n+1}}{(4n+1)!}.$$

Bem, já temos nossa função! No caso, funções! Para qualquer valor de t, a função

$$f(x) = \left(\sinh 2xt + e^{2t^2}\sin 2xt\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

é autofunção da TF com autovalor i. De certa forma, a TF é uma transformação muito simples. Qualquer função pode ser decomposta nesses quatro subespaços ortogonais e sua TF será a combinação linear de 4 autofunções.

Quero finalizar falando da "raiz quadrada" da TF, $\mathcal{F}^{\frac{1}{2}}$, como discutimos em aula. Trata-se da transformação linear tal que

$$\mathcal{F}^{\frac{1}{2}}\left[\mathcal{F}^{\frac{1}{2}}[f(x)]\right] = \mathcal{F}[f(x)].$$

Como temos uma base diagonal para $\mathcal{F}[f(x)]$, temos que para toda função $f(x)$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \langle f, \psi_n\rangle \psi_n(x),$$

supondo as ψ_n normalizadas (o que não é o caso acima). Podemos explorar essa expansão para definir a ação da "raiz quadrada" da TF. É natural escrevermos

$$\mathcal{F}^{\frac{1}{2}}[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} i^{\frac{n}{2}} \langle f, \psi_n\rangle \psi_n(x),$$

Essa definição é perfeita e suficiente para explorar diversas propriedades da transformada $\mathcal{F}^{\frac{1}{2}}$. *É possível também expressá-la numa forma fechada, com uma integral como a TF. Isso se faz com o chamado núcleo de Mehler, veja mais sobre isto aqui.*

Para os que fizeram (e gostaram!) de Álgebra Linear Avançada, eu proponho um problema. Vamos considerar matrizes, mas a ideia pode ser aplicada também à TF. Seja M *uma matriz quadrada tal que* $M^4 = 1$. *É possível definir a matriz* $P = \sqrt{M}$, *quer dizer a matriz* P *tal que* $P^2 = M$, *a partir de um polinômio de grau 3 em* M. *Como? Assim. Seja o polinômio*

$$P = a + bM + cM^2 + dM^3,$$

sendo $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *constantes. Calculemos agora* P^2, *lembrando que* $M^4 = 1$ *e que, portanto,* $M^5 = M$ *e* $M^6 = M^2$. *Teremos*

$$P^2 = 2(ad + bc)M^3 + (2ac + b^2 + d^2)M^2 + 2(ab + cd)M + a^2 + 2bd + c^2.$$

Ocorre que é sempre possível determinar as constantes de tal forma que tenhamos $P^2 = M$.*(!) Mais que isso, as constantes não dependem de* M.*(!) Mostrem! Como esses coeficientes não dependem de* M, *eles são os mesmos para a TF.*