Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 2 - MS650 - Métodos Matemáticos II, 28 de agosto de 2023.

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

---

1. Esboce as funções abaixo e determine suas **duas** primeiras derivadas distribucionais.

(a) (2 Pontos) $f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-|x|)}$

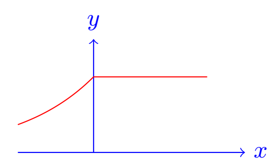
Solução. *A não suavidade vem do argumento da exponencial. Vejam que*

$$\frac{1}{2}(x-|x|) = \begin{cases} 0, & \text{para } x > 0, \\ x, & \text{para } x < 0, \end{cases}$$

de onde temos diretamente

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-|x|)} = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0, \\ e^x, & \text{para } x < 0, \end{cases}$$

cujo gráfico tem o aspecto abaixo



de onde vemos que haverá uma descontinuidade na primeira derivada e uma delta na segunda. Teremos

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \text{sign}\,(x)\right) e^{\frac{1}{2}(x-|x|)}.$$

Lembrando que $\text{sign}\,(x) = 2\Theta(x) - 1$, *ficamos com*

$$f'(x) = (1-\Theta(x))e^{\frac{1}{2}(x-|x|)},$$

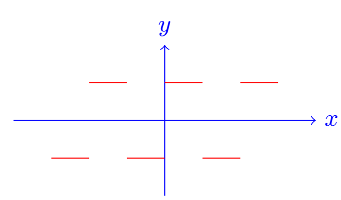
suja segunda derivada será

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}(1-\Theta(x))\left(1-\text{sign}\,(x)\right) e^{\frac{1}{2}(x-|x|)} - \Theta'(x)e^{\frac{1}{2}(x-|x|)}, \\ &= (1-\Theta(x))e^{\frac{1}{2}(x-|x|)} - \delta(x). \end{aligned}$$

(b) (2 Pontos) $f(x) = \text{sign}\,(\sin x)$, sendo $\text{sign}\,(x)$ a função sinal de x,

$$\text{sign}\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0, \\ -1, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Solução. *Primeiro, notem que* $\sin x$ *é positivo para* $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ *e negativo para* $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$. *A função da questão tem o seguinte aspecto*



e já notamos que sua derivada terá apenas parte distribucional, será uma sucessão de deltas. Para $x = 2k\pi$, sempre temos um termo que corresponde a $2\delta(x)$. Por outro lado, para $x = (2k-1)\pi$, temos um termo do tipo $-2\delta(x)$. As duas primeiras derivadas distribucionais dessa função são, portanto,

$$f'(x) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(x-2k\pi) - \delta(x-(2k-1)\pi)\right)$$

e

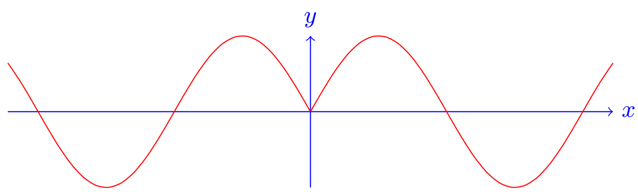
$$f''(x) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta'(x-2k\pi) - \delta'(x-(2k-1)\pi)\right).$$

Notem que poderíamos ter descrito a função do gráfico (mostrem!) como

$$f(x) = -1 + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\Theta(x+2k\pi) - \Theta(x+(2k-1)\pi)\right)$$

(c) (2 Pontos) $f(x) = \sin(|x|)$

Solução. *Esta função tem o seguinte aspecto*

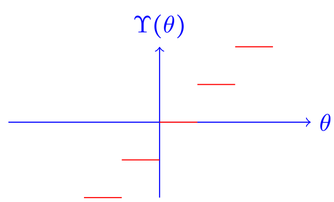


de onde vemos que devemos esperar uma delta na origem como segunda derivada. De fato, temos

$$f'(x) = \text{sign}(x)\cos(x) \quad e \quad f''(x) = 2\delta(x) - \sin(|x|)\,.$$

2. (4 Pontos) Esboce a função $\Upsilon(\theta) = \int_{\pi}^{\theta} Ш(x)\,dx$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, sendo $Ш(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x+2k\pi)$ a chamada função pente de Dirac.[1]

Solução. *Pela maneira com que está definida, $\Upsilon(\theta)$ é zero para $0 < \theta < 2\pi$. Ao passar pelos pontos $2k\pi$ da esquerda para a direita, o valor de $\Upsilon(\theta)$ é acrescido de 1 a cada passagem. É evidente que temos uma "escadinha" infinita, ver abaixo.*



É instrutivo escrever esta função em termos das funções $\Theta(\theta)$ de Heaviside. Notem que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Theta(\theta - 2k\pi)$$

é zero para $x < 0$ e corresponde a nossa escada para $\theta > 0$. Quem descreve a escada para $\theta < 0$? Esta função (mostrem!)

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\Theta(2k\pi - \theta).$$

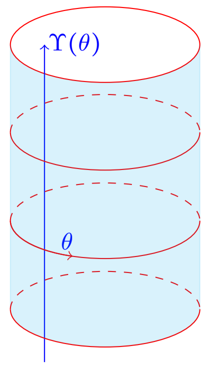
[1]Cultura alfabética: Υ é a letra grega upsilon maiúsculo. Sua versão minúscula é υ, que se confunde facilmente com o ni minúsculo ν, cuja versão maiúscula é igual ao nosso N romano. Ш é a letra "sha" do alfabeto cirílico.

Nossa função é portanto

$$\Upsilon(\theta) = -\Theta(-\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Theta(\theta - 2k\pi) - \Theta(2k\pi - \theta) \right)$$

3. (2 Pontos extras) Atreva-se e esboce a função $\Upsilon(\theta)$ no cilindro.

Solução. *Basta recuperar o cilindro a partir do gráfico da questão anterior. Relembrando, o cilindro foi "planificado" abrindo-o e repetindo a função em cada período. Para recuperar o cilindro, temos que "enrolar" o plano novamente dando origem ao cilindro. Teremos algo do tipo*



com as circunferências descontinuas na linha vertical verde que corresponde a $\theta = 0$. Cada circunferência corresponde a um degrau da escada. Vista do cilindro, a função $\Upsilon(\theta)$ é multivaluada. Ao percorrer a circunferência $0 \le \theta \le 2\pi$, deve-se "subir" ou "descer" um nível, dependendo do sentido em que cruza a linha verde $\theta = 0$.