Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 1 - MS650 - Métodos Matemáticos II, 14 de agosto de 2023.

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

---

1. (5 pontos) Explore a série de Fourier da função $f(x) = x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ e calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$.

Solução. *A função $f(x) = x$ é ímpar e portanto só terá série de senos no intervalo $[-\pi, \pi]$. Temos*

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2(-1)^k}{k},$$

e a série será

$$x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

Notem que a extensão periódica para a função $f(x) = x$ é descontínua nos limites do intervalo $[-\pi, \pi]$. Porém, para qualquer x no interior do intervalo, a série de Fourier irá convergir para o valor $f(x) = x$. É o caso, em particular, de $x = 1 - \pi$. Como $\sin k(1-\pi) = (-1)^k \sin k$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

É curioso comparar este resultado com a integral que já conhecemos da função $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Notem que da mesma série podemos deduzir também o seguinte resultado nada trivial

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n = -\frac{1}{2}.$$

As séries de Fourier são muito úteis para calcularmos esse tipo de série envolvendo senos e cossenos. Por exemplo, não é difícil calcular a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2}$$

a partir da série de Fourier da questão 2. Por outro lado, o cálculo de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

parece ser **MUITO** *mais difícil. Quem conseguir calcular essa série, e me explicar satisfatoriamente como fez, vai ganhar um ε expressivo na média final. Quem aparecer com a solução e não conseguir explicar, ganha um ε muito menos expressivo, mas ganha. Mãos à obra! (O Wolfram alpha/Mathematica calcula essa série em termos de umas funções especiais esquisitas, essa solução não vale...)*

2. (5 pontos) Explore a série de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ do exercício 2 do livro,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx,$$

e calcule $\zeta(4)$, sendo $\zeta(z)$ a nossa conhecida função zeta de Riemann $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.

Solução. *Talvez a solução mais simples deste problema seja via a identidade de Parseval. Teremos*

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \pi \left(\frac{2\pi^4}{9} + 16 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}}_{\zeta(4)} \right) \Rightarrow \zeta(4) = \frac{1}{16} \left(\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Outra solução possível e integrando-se a série de Fourier do enunciado. Notem que

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}x = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx.$$

Este resultado foi obtido integrando-se ambos os lados, e identificando a constante arbitrária como zero, pois a função do lado direito é impar, e nesse caso temos $a_0 = 0$ na série de Fourier. Integrando-se novamente, teremos

$$\frac{x^4}{12} - \frac{\pi^2}{6}x^2 = \frac{a_0}{2} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx.$$

O coeficiente a_0 será dado por

$$a_0 = \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^4}{2} - \pi^2 x^2\right)dx = -\frac{7\pi^2}{90}.$$

A extensão periódica da função $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\pi^2}{6}x^2$ é contínua, e portanto sabemos que a a série de Fourier sempre vai convergir pra $f(x)$. Tomando-se $x = \pi$ e lembrando que $\cos n\pi = (-1)^n$, ficamos com

$$-\frac{\pi^4}{12} = -\frac{7\pi^4}{180} - 4\zeta(4) \Rightarrow \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Este artigo apresenta de maneira pedagógica alguns métodos de soma para séries. Não discute apenas as séries convergentes como as deste teste que pudemos calcular via série de Fourier, mas também aquelas curiosas séries divergentes como $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}$.
