Métodos Matemáticos II Turma Especial – MS650

Exame 1/Prova de Proficiência

29 de setembro de 2023

- *Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima é 10.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápiz e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.* **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado será enviado por email.* *Boa prova!*

---

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } |x| \le 1, \\ 0, & \text{para } |x| > 1. \end{cases}$$

(a) (0.5 Ponto) Determine a transformada de Fourier de $f(x)$.

Solução.

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos kx dx = \frac{\sin k}{k}.$$

(b) (1.0 Ponto) Usando a transformada inversa, mostre que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos x\omega}{\omega} d\omega.$$

Solução. *A transformada inversa será*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} F(k) dk = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin k \cos xk}{k} dk$$

(c) (1 Ponto) A partir do item b, mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos x\omega}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & \text{para } |x| > 1, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{para } |x| = 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{para } |x| < 1. \end{cases}$$

(Dica: você pode usar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$.)

Solução. *Trata-se de uma transformada de Fourier, portanto sabemos que a convergência sempre é para $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Isto é suficiente para a resposta. Obviamente, a única dúvida é sobre o ponto de descontinuidade da função, $x = \pm 1$. Neste caso, note que*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega}, d\omega$$

e podemos usar a dica.

(d) (0.5 Ponto) O que seria obtido caso repetíssemos os itens a e b para a função abaixo? Explique.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } |x| < 1, \\ 0, & \text{para } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Solução. *Nada muda, pois a transformada de Fourier é insensível a mudanças puntuais nas funções.*

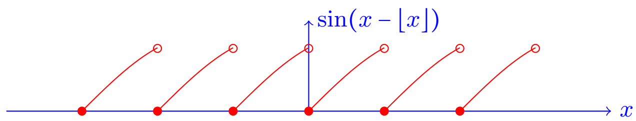
2. Calcule e esboce as duas primeiras derivadas distribucionais das funções abaixo.

(a) (1 Ponto) $f(x) = 2^{|x|}$.

Solução. *A primeira derivada será* $f'(x) = (\log 2)2^{|x|}\text{sign}(x)$. *Lembrando que* $\text{sign}(x) = 2\theta(x) - 1$, *temos que a segunda derivada será* $f''(x) = (\log 2)^2 2^{|x|} + 2(\log 2)\delta(x)$.

(b) (1.5 Ponto) $f(x) = \sin(x - \lfloor x \rfloor)$, sendo $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de $x \in \mathbb{R}^n$.

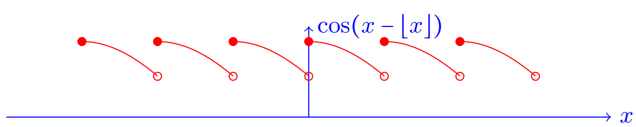
Solução. *Esta função é a extensão periódica da função* $\sin(x)$ *com* $0 \leq x < 1$ *e período 1, ver a solução do exercício 2 da P1 da turma normal. Abaixo vai o aspecto de seu gráfico.*



A primeira derivada será a extensão periódica da função $\cos(x)$ *com* $0 \leq x < 1$ *e período 1, com deltas nos saltos*

$$f'(x) = \cos(x - \lfloor x \rfloor) - \sin 1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k).$$

Vejam o aspecto da função $\cos(x - \lfloor x \rfloor)$



Repetindo o mesmo argumento, chegamos a

$$f''(x) = -\sin(x - \lfloor x \rfloor) + (1 - \cos 1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) - \sin 1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(x - k).$$

3. (2.5 Pontos) Resolva a equação integral

$$y(x) = x - \int_0^x (x - t)y(t)\,dt.$$

(Dica: use a transformada de Laplace.)

Solução. *Calculando-se a transformada de Laplace nos dois lados da equação e usando a propriedade da convolução*

$$\mathcal{L}[y(x)] = \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[x * y(x)] = \mathcal{L}[x](1 - \mathcal{L}[y(x)]).$$

Como $\mathcal{L}[x] = s^{-2}$*, ficamos com* $\mathcal{L}[y(x)] = \frac{1}{1+s^2}$*, de onde temos finalmente*

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right] = \sin x,$$

que vem diretamente do exemplo 4.2 do livro.

4. (2.5 Pontos) Resolva a equação de Laplace $\nabla^2\phi(x,y) = 0$ no domínio

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le L, 0 \le y \le L\}, \quad L > 0,$$

com as condições de contorno

$$\begin{cases} \phi(0,y) = \phi(x,0) = 0, \\ \phi(x,L) = x, \\ \phi(L,y) = y. \end{cases}$$

Solução 1. *Este problema pode ser resolvido por inspeção. A função* $\phi(x,y) = Axy$*, sendo* A *uma constante, satisfaz trivialmente a equação de Laplace. Escolhendo-se* $A = L^{-1}$*, vemos que ela satisfaz também as condições de contorno. Dado a unicidade das soluções da equação de Laplace com condições de contorno bem postas, temos*

$$\phi(x,y) = \frac{xy}{L}$$

Solução 2. *(Muito mais complicada.) A solução deste problema corresponde a soma de duas soluções da equação de Laplace* ϕ_1 *e* ϕ_2 *com condições de contorno*

$$\begin{cases} \phi_1(0,y) = \phi_1(x,0) = 0, \\ \phi_1(x,L) = x, \\ \phi_1(L,y) = 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \phi_2(0,y) = \phi_2(x,0) = 0, \\ \phi_2(x,L) = 0, \\ \phi_2(L,y) = y. \end{cases}$$

A solução ϕ_1 *pode ser obtida via separação de variáveis. Após a imposição das condições* $\phi_1(0,y) = \phi_1(L,y) = \phi_1(x,0) = 0$*, ficamos com*

$$\phi_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}.$$

A imposição da última condição de contorno nos dá

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sinh n\pi)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Porém, conhecemos a seguinte expansão em série de Fourier do exemplo 1.6 do capítulo 1 do livro (não era necessário escrever a série, apenas indicar)

$$x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

de onde obtemos:

$$A_n = (-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi\sinh n\pi}.$$

A solução ϕ_2 *é análoga, bastando trocar* $x \leftrightarrow y$*. A solução final será*

$$\phi(x,y) = 2L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi\sinh n\pi}\left(\sin\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L} + \sinh\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{L}\right).$$

Quem chegou a este resultado, sem perceber que de fato essa série é proporcional a xy, também ganhou os 2.5 pontos. Para mostrar que, de fato, essa expressão é proporcional a xy, deve-se expandir $\sinh \frac{n\pi y}{L}$ em série de Fourier (idem para $\sinh \frac{n\pi x}{L}$), substituir as séries na expressão, e mostrar que ela se reduz ao produto das séries de x e y. Sim, muitíssimo mais trabalho que a primeira solução...

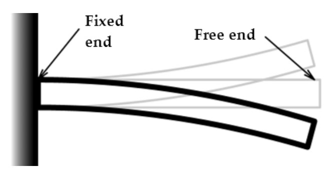
5. A equação de Euler-Bernoulli
$$\frac{1}{\mu^2}\partial_t^2 u + \partial_x^4 u = 0,$$
com $\mu \in \mathbb{R}$ constante, descreve pequenas oscilações ao longo de uma viga elástica homogênea.

(a) (1 Ponto) Mostre que esta equação é separável e obtenha sua solução geral.

Solução. *Fazendo-se $u(t,x) = T(t)X(x)$ e seguindo os passos usuais da separação de variáveis, ficamos com*
$$\frac{T''}{\mu^2 T} = -\frac{X^{(iv)}}{X} = -\lambda.$$
A equação em x será
$$X^{(iv)} - \lambda X = 0.$$
Procurando soluções do tipo $X = e^{\kappa x}$, teremos $\kappa^4 = \lambda$. Por outro lado, a equação em t será $T'' + \mu^2 \lambda T = 0$. Para todo $\omega \in \mathbb{R}$, teremos 4 soluções LI em x: $e^{\omega x}$, $e^{-\omega x}$, $e^{i\omega x}$ e $e^{-i\omega x}$, e para todas elas, $\lambda = \omega^4 \geq 0$. Assim, ficamos com as seguintes soluções:
$$X_\omega(x) = A_\omega \cos\omega x + B_\omega \sin\omega x + C_\omega \cosh\omega x + D_\omega \sinh\omega x \quad \text{e} \quad T_\omega(t) = E_\omega \sin\mu\omega^2 t + F_\omega \cos\mu\omega^2 t$$
A solução geral é combinação de todos esses modos $u(t,x) = \sum_\omega X_\omega(x)T_\omega(t)$.

(b) (1.5 Pontos) Suponha que a viga tem comprimento L. A situação conhecida na engenharia como "viga em balanço" corresponde às seguintes condições de contorno nas extremidades da viga: (ver Figura)

$$u(t,0) = u_x(t,0) = 0 \text{ (extremidade fixa) e}$$
$$u_{xx}(t,L) = u_{xxx}(t,L) = 0 \text{ (extremidade livre).}$$



Determine o espéctro (conjunto de autovalores/freqüências naturais) dessa viga. (Basta encontrar a equação característica dos autovalores.)

Solução. *Do item anterior, temos que as freqüências serão $\mu\omega^2$, sendo ω os autovalores que devem surgir da equação da parte espacial. Impondo-se as condições de contorno, teremos:*
$$u(t,0) = 0 \Rightarrow A_\omega + C_\omega = 0, \quad u_x(t,0) = 0 \Rightarrow \omega B_\omega + \omega D_\omega = 0$$
$$u_{xx}(t,L) = 0 \Rightarrow -\omega^2 A_\omega \cos\omega L - \omega^2 B_\omega \sin\omega L + \omega^2 C_\omega \cosh\omega L + \omega^2 D_\omega \sinh\omega L = 0$$
$$u_{xxx}(t,L) = 0 \Rightarrow \omega^3 A_\omega \sin\omega L - \omega^3 B_\omega \cos\omega L + \omega^3 C_\omega \sinh\omega L + \omega^3 D_\omega \cosh\omega L = 0$$
de onde temos $A_\omega = -C_\omega$, $B_\omega = -D_\omega$ e
$$A_\omega(\cos\omega L + \cosh\omega L) + B_\omega(\sin\omega L + \sinh\omega L) = 0$$

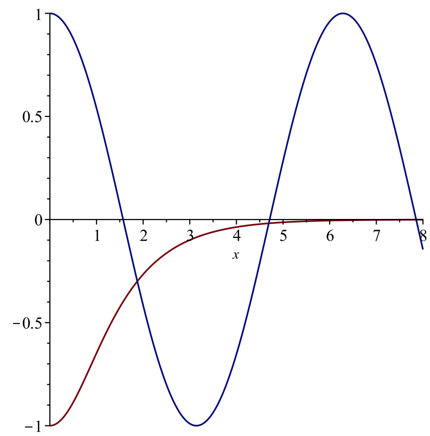


Figura 1: Zeros da equação característica $\cos\omega L = -\frac{1}{\cosh\omega L}$.

e

$$A_\omega\left(\sin\omega L - \sinh\omega L\right) - B_\omega\left(\cos\omega L + \cosh\omega L\right) = 0,$$

que é um sistema 2×2 *e, para que haja soluções não triviais, precisamos que*

$$\begin{vmatrix} \cos\omega L + \cosh\omega L & \sin\omega L + \sinh\omega L \\ \sin\omega L - \sinh\omega L & -\cos\omega L - \cosh\omega L \end{vmatrix} = 2\cos\omega L\cosh\omega L + 2 = 0,$$

que é a equação característica para o problema. Vamos escrevê-la como

$$\cos\omega L = -\frac{1}{\cosh\omega L}$$

cujo aspecto está na Fig. 3. Vemos claramente que os autovalores são discretos e infinitos. Mais que isso, podemos inferir que a "parte alta" do espéctro, que dará origem as freqüências $f_n \gg 1$, *são muito próximas de* $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$, *para* $n \gg 1$. *As freqüencias correspondentes serão*

$$f_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2\mu}{4L^2}, \quad n \gg 1.$$

Lembrando do espéctro da corda vibrante, que era simplesmente $f_n = \frac{n\pi c}{L}$, *vemos (talvez seria melhor dizer "ouvimos") que a viga deve soar diferente da corda. Não há nenhuma corda que tenha o mesmo espectro, nem a parte mais alta, de uma viga. Quem quizer fazer um instrumento musical "intrinsecamente" diferente, poderia começar por uma viga em balanço...*