Prova 1 – Métodos Matemáticos II – MS650
29 de setembro de 2023

- *Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima é 10.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápiz e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.* **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas, o mais rápido possível, no site do curso:* `http://vigo.ime.unicamp.br/ms650`

Boa prova!

---

1. (2.5 Pontos) Considere a série de Fourier

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{2n\pi x}{P} + B_n \sin\frac{2n\pi x}{P}\right).$$

Abaixo, encontram-se 5 conjuntos de coeficientes (A_n, B_n) e cinco aspectos de $S(x)$. Há uma relação biunívoca entre eles. Identifique-os, justificando suas escolhas.
Coeficientes:

(1) $A_0 = \frac{A}{2}$, $A_n = 0$, $B_n = \frac{-A}{n\pi}$

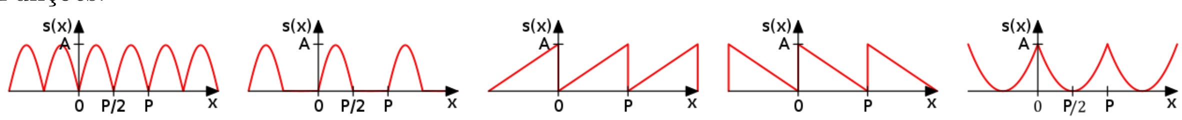
(2) $A_0 = \frac{A}{2}$, $A_n = 0$, $B_n = \frac{A}{n\pi}$

(3) $A_0 = \frac{A}{3}$, $A_n = \frac{4A}{\pi^2 n^2}$, $B_n = 0$

(4) $A_0 = \frac{2A}{\pi}$, $A_n = \begin{cases} \frac{-4A}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$, $B_n = 0$

(5) $A_0 = \frac{A}{\pi}$, $A_n = \begin{cases} \frac{-2A}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$, $B_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$

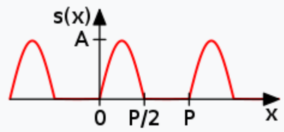
Funções:



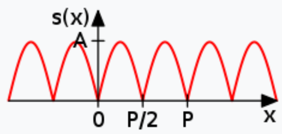
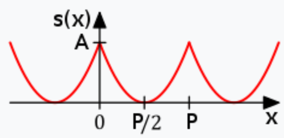
(a) (b) (c) (d) (e)

Solução. *A redação original desta questão era a seguinte: "Nossos conhecidos personagens vivem momentos de tensão. Preparando-se para a prova, combinaram que fariam um catálogo de funções e suas respectivas séries de Fourier. Resolveram começar pela conhecida enciclopédia do saber universal. M ficou incumbido de salvar as figuras com as funções, e P as fórmulas. Porém, eles embaralharam essas figuras e agora não conseguem mais identificar as correspondências, estão discutindo muito, um põe a culpa no outro. Ajude-os a resolver a trapalhada, identificando as correspondências entre as funções e as respectivas séries. Justifique suas escolhas."*

Bem, obviamente há inúmeras maneiras de se resolver esta questão. A primeira observação é que, dos gráficos, vemos que apenas a função (b) não tem paridade definida (a menos da constante A_0). Ao mesmo tempo,a única fórmula que mistura A_n e B_n é a (5). Portanto, já temos uma correspondência (b) $\Leftrightarrow$ (5). Por curiosidade, a *função é esta (diretamente daqui):*

$s(x) = \begin{cases} A\sin\left(\frac{2\pi}{P}x\right) & \text{for } 0 \le x < P/2 \\ 0 & \text{for } P/2 \le x < P \end{cases}$		$A_0 = \frac{A}{\pi}$ $A_n = \begin{cases} \frac{-2A}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$ $B_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$	Half-wave rectified sine

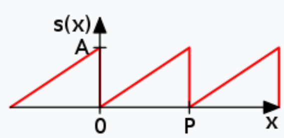
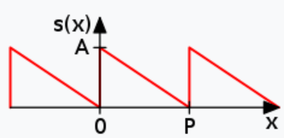
Sobram agora 2 funções contínuas, (a) e (e), e duas descontínuas, (c) e (d). Tirando a fórmula (5) já identificada, há dois conjuntos de coeficientes que decaem como $1/n^2$: (3) e (4) e, portanto, devem estar relacionadas com (a) e (e). Notem que em (a), temos $S(0) = 0$, enquanto em (e), temos $S(0) = A$. Como A_0 é positivo em ambos os casos, a fórmula (3) não pode corresponder ao caso (a), pois não há como ter $S(x) = 0$ nesse caso. Temos, portanto, mais duas identificações (a) ⇔ (4) e (e) ⇔ (3). São estas as funções, sempre da mesma fonte.

$s(x) = A\left\lvert\sin\left(\frac{2\pi}{P}x\right)\right\rvert \quad \text{for } 0 \le x < P$		$A_0 = \frac{2A}{\pi}$ $A_n = \begin{cases} \frac{-4A}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$ $B_n = 0$	Full-wave rectified sine
$s(x) = \frac{4A}{P^2}\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 \quad \text{for } 0 \le x < P$		$A_0 = \frac{A}{3}$ $A_n = \frac{4A}{\pi^2 n^2}$ $B_n = 0$	

Sobram agora as duas funções descontínuas e as fórmulas com decaimento do tipo $1/n$. Notem que a análise de $S(0)$ nesses casos não nos diz nada, pois em ambos os casos a série converge para o ponto médio da descontinuidade, $S(0) = \frac{A}{2}$. Podemos usar a informação sobre o salto da função. Quer dizer, se diferenciarmos a série, deve aparecer uma δ na origem. Para o caso (d), o salto é positivo, enquanto que no caso (c), é negativo. Derivando-se a fórmula (2), obtemos

$$S'(x) = \frac{2A}{P}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{2n\pi x}{P} = \frac{2\pi A}{P}\delta\left(\frac{2\pi x}{P}\right) = A\delta(x),$$

e, portanto temos as identificações finais: (d) ⇔ (2) e (c) ⇔ (1).

$s(x) = \frac{Ax}{P} \quad \text{for } 0 \le x < P$		$A_0 = \frac{A}{2}$ $A_n = 0$ $B_n = \frac{-A}{n\pi}$	
$s(x) = A - \frac{Ax}{P} \quad \text{for } 0 \le x < P$		$A_0 = \frac{A}{2}$ $A_n = 0$ $B_n = \frac{A}{n\pi}$	

2. Calcule e esboce a derivada distribucional das funções abaixo, sendo $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$. Considere os casos $0 < a < 1$ e $a > 1$ separadamente.

   (a) (1 Ponto) $f(x) = a^{\lfloor x \rfloor}$

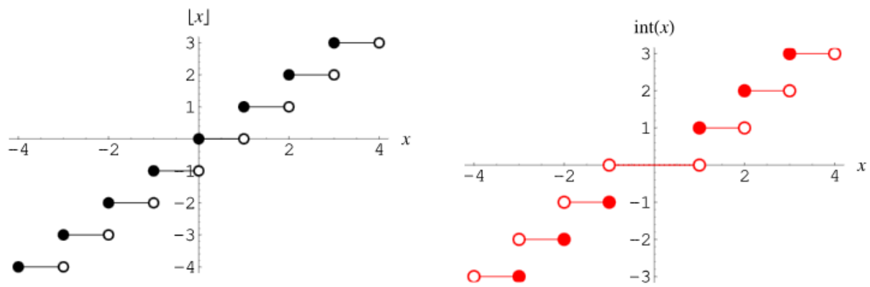
(b) (1.5 Pontos) $f(x) = a^{x-\lfloor x \rfloor}$

Solução. *Ora, ora, não é que este exercício simples e despretensioso é muito mais sutil do que parece? Vamos lá aprender algo novo e interessante.*

Antes de mais nada, devo lembrar, como comentado durante a prova, que há uma certa confusão no enunciado com respeito a definição da função piso para $x < 0$. *Não que seja uma desculpa pelo deslize, pelo qual peço desculpas, mas é uma confusão bastante comum, que sempre dá origem a problemas. A função* $\lfloor x \rfloor$ *é o maior inteiro menor que* x. *Portanto,* $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$. *Porém, como está no enunciado, seria a parte inteira de* -0.5, *e portanto 0. A função "parte inteira" é normalmente representada por* $\mathrm{int}(x)$ *e definida como*

$$\mathrm{int}(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & x \geq 0, \\ \lceil x \rceil & x < 0, \end{cases}$$

sendo $\lceil x \rceil$ *a chamada função teto, que corresponde ao menor inteiro maior que* x. *Abaixo vão os respectivos aspectos dessas duas funções.*



Ambas definições serão consideradas corretas. Para termos ideia das diferenças que virão dessas duas possibilidades, vamos dar uma olhada nas derivadas distribucionais das duas funções. Do gráfico, já sabemos que

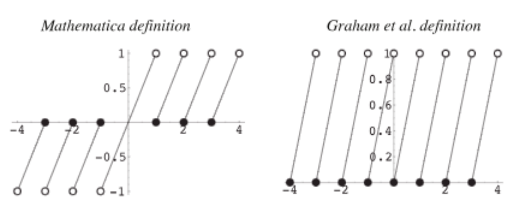
$$\frac{d}{dx}\lfloor x \rfloor = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\mathrm{int}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x-k) + \delta(x+k),$$

quer dizer, a única diferença é a ausência do salto na origem. Essas derivadas distribucionais podem ser calculadas por "inspeção", mas se quiserem "deduzir" a partir do resultado conhecido $\theta'(x) = \delta(x)$, *basta lembrar que, para* $x \geq 0$

$$\lfloor x \rfloor = \mathrm{int}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x-k),$$

admitindo aqui $\theta(0) = 1$. *Para* $x < 0$, *basta notar que* $\mathrm{int}(x)$ *é uma função impar, enquanto a função piso é tal que* $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ *para todo* x *positivo não inteiro.*

Ambas funções que devemos considerar envolvem a função "parte fracionária", $x - \lfloor x \rfloor$, *ou* $x - \mathrm{int}(x)$, *de acordo com a escolha anterior. Os aspectos dessas funções são estes:*

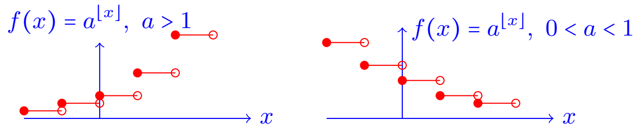


sendo o primeiro o caso $x - \mathrm{int}(x)$, e o segundo o $x - \lfloor x \rfloor$. A diferença, novamente, será o salto na origem. Teremos

$$\frac{d}{dx}\left(x - \lfloor x \rfloor\right) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\left(x - \mathrm{int}(x)\right) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x-k) + \delta(x+k).$$

Enfim, vamos agora ao exercício em questão e as surpresas. Serão apresentada as soluções para o caso da definição padrão de $\lfloor x \rfloor$, mas o caso correspondendo a $\mathrm{int}(x)$ é completamente análogo, com as ressalvas anteriores sobre a origem.

A função $f(x) = a^{\lfloor x \rfloor}$ corresponde a uma "escada" exponencial, quer dizer, umas escada cuja altura dos degraus segue uma exponencial, vejam abaixo seus aspectos.



Desses gráficos, já sabemos que a derivada distribucional será uma coleção de deltas nas singularidades, quer dizer, $\delta(x-k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Notem que para $x = k \in \mathbb{Z}$, a amplitude do salto é $a^k - a^{k-1} = a^k(1 - a^{-1})$, de onde temos que para o caso crescente ($a > 1$), os saltos são positivos, enquanto que para o decrescente ($0 < a < 1$), os saltos são negativos, como esperado dos gráficos. A derivada em questão é

$$f'(x) = (1 - a^{-1}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \delta(x-k),$$

e esta é a solução do item a). O esboço é apenas um conjunto de "spikes" nos inteiros correspondendo às deltas, pra cima no caso $a > 1$, pra baixo no outro.

Agora vem uma sutileza. Poderíamos ter usado a regra da cadeia "ingênua"? Tentemos. Teremos

$$f'(x) = (\log a) a^{\lfloor x \rfloor} \frac{d}{dx} \lfloor x \rfloor = (\log a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \delta(x-k),$$

e já vemos que o resultado é diferente. Tem algo errado ai? Sim, tem. As amplitudes dos saltos estão erradas, como podemos ver do gráfico de $f(x)$. Vamos pegar um caso mais simples para tentar entender o que está acontecendo, vamos examinar a função $f(x) = (\theta(x))^n$. Obviamente, $(\theta(x))^n = \theta(x)$ para todo n e teremos portanto $f'(x) = \delta(x)$. Ao mesmo tempo, a regra da cadeia ingênua nos diz que

$$\frac{d}{dx}(\theta(x))^n = n(\theta(x))^{n-1}\delta(x) = n\theta(x)\delta(x),$$

o que nos daria $\theta(x)\delta(x) = \frac{1}{n}\delta(x)$ para todo n, mostrando que há algo errado, ou melhor, mal definido. Suponha que "aceitemos", como discutimos na aula a partir de argumentos de aproximantes, o teorema do "meio delta":

$$\theta(x)\delta(x) = \delta(x)\theta(x) = \frac{1}{2}\delta(x),$$

que corresponde a admitir que a regra da cadeia ingênua funciona apenas para $n = 2$. Notem que admitindo isto, teremos

$$\theta(x)\left(\theta(x)\delta(x)\right) = \frac{1}{2}\theta(x)\delta(x) = \frac{1}{4}\delta(x) \neq \left(\theta(x)\theta(x)\right)\delta(x) = \frac{1}{2}\delta(x),$$

quer dizer, o produto de distribuições não é associativo! É claro agora que a regra da cadeia ingênua não pode valer! Temos que levar em conta essa peculiaridade para formulá-la corretamente. Por exemplo, devemos entender θ^3 como $\theta(\theta\theta)$ e, neste caso,

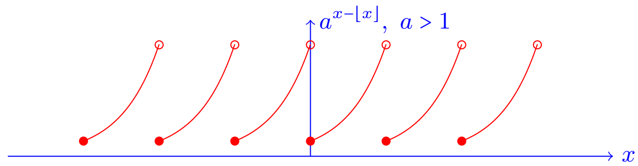
$$\frac{d}{dx}\theta(\theta\theta) = \delta(\theta\theta) + \theta(\delta\theta) + \theta(\theta\delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta = \delta.$$

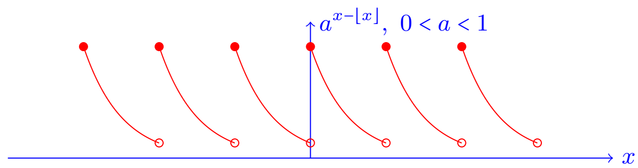
Para n arbitrário, teremos

$$\frac{d}{dx}\underbrace{(\theta(\theta(\cdots(\theta\theta)\cdots)}_{\theta^n} = \underbrace{(\delta(\theta(\cdots(\theta\theta)\cdots)}_{\delta\theta=\frac{1}{2}\delta} + \underbrace{(\theta(\delta(\cdots(\theta\theta)\cdots)}_{\theta(\delta\theta)=\frac{1}{4}\delta} + \cdots + \underbrace{(\theta(\theta(\cdots(\delta\theta)\cdots)}_{\frac{1}{2^{n-1}}\delta} + \underbrace{(\theta(\theta(\cdots(\theta\delta)\cdots)}_{\frac{1}{2^{n-1}}\delta} = \delta$$

que corresponde a regra da cadeia (não associativa) correta. Para ler mais sobre este curioso resultado, recomendo este artigo, onde aprendi isso. Esta discussão no site da disciplina também é pertinente. Esta história tem uma moral importantíssima: nunca, jamais, ever, use a regra da cadeia com δ e θ no argumento das funções. Use-as apenas em expressões lineares. Quem usou a regra da cadeia e notou que algo estava errado, vai ganhar a pontuação máxima. Se usou sem perceber que os saltos estavam errados, vai ganhar pontos parciais só, de acordo com o que fizeram.

Vamos agora ao caso da da segunda função, $f(x) = a^{x-\lfloor x \rfloor}$. Abaixo, vão os gráficos para $a > 1$ e $0 < a < 1$





Trata-se da extensão periódica da função a^x, com $0 \le x < 1$, admitindo-se um período 1. Por inspeção, vemos que a derivada será a extensão periódica de $\log(a)a^x$ com deltas em $x = k \in \mathbb{Z}$. Notem que $f(x) = a^{x-\lfloor x\rfloor} = a^x b^{\lfloor x\rfloor}$, com $b = a^{-1}$ e, portanto

$$f'(x) = \log(a)a^x b^{\lfloor x\rfloor} + a^x \frac{d}{dx} b^{\lfloor x\rfloor} = \log(a)a^{x-\lfloor x\rfloor} - (a-1)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k),$$

onde usamos o resultado do item anterior. Como previsto, o gráfico é da extensão periódica de $\log(a)a^x$ com deltas em $x = k \in \mathbb{Z}$, todas com a mesma amplitude.

3. (2.5 Pontos) Calcule, em forma fechada, a transformada de Laplace $\mathcal{L}[\theta(x-1)\text{Ш}(x)]$, sendo $\text{Ш}(x) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x+2k\pi)$ a chamada função pente de Dirac.

   Solução. *Este é um caso particular do exercício 5 do capítulo 4 do livro. A função $\theta(x-1)$ está ai justamente para evitarmos o problema de definir o que entendemos por $\theta(x)\delta(x)$. A solução é*

$$\int_0^\infty e^{-sx}\theta(x-1)\text{Ш}(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_1^\infty e^{-sx}\delta(x-2k\pi)dx = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-2ks\pi} = \frac{e^{-2s\pi}}{1-e^{-2s\pi}}.$$

4. No problema 7 do Capítulo 3 do livro, vocês mostraram que se $\Psi(x,t)$ é da forma

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{i\left(kx-\frac{k^2t}{2}\right)}dk,$$

   com $\Psi(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, então $\Psi(x,t) = \dfrac{e^{\frac{-x^2}{2(1+it)}}}{\sqrt{1+it}}$.

(a) (0.5 Ponto) Escreva alguma EDP homogênea, com coeficientes constantes, que tenha $\Psi(x,t)$ como solução.

Solução. *Notem que*

$$\partial_x^2\Psi = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\left[-k^2 e^{i\left(kx-\frac{k^2 t}{2}\right)}\right]dk, \quad \text{e} \quad \partial_t\Psi = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\left[-\frac{ik^2}{2}e^{i\left(kx-\frac{k^2 t}{2}\right)}\right]dk,$$

de onde temos que uma possível EDP com essa solução é

$$i\partial_t\Psi = -\frac{1}{2}\partial_x^2\Psi,$$

quer dizer, a equação de Schroedinger, para o deleite de alguns, e o desespero de outros.... O $\Psi(x,t)$ do problema 7 é o pacote gaussiano mais simples que se pode pensar em MQ.

(b) (1 Ponto) Determine $\Psi(x,t)$ para o caso em que $\Psi(x,0) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Solução. *Bem, há várias possíveis soluções aqui. Vamos começar pela que parece a mais simples de todas. Notem que $xe^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{d}{dx}e^{-\frac{x^2}{2}}$, e nós já conhecemos a solução para o caso $\Psi(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. É fácil ver (convençam-se!) que se $\Psi(x,t)$ é solução da equação de Schroedinger do item anterior, $\partial_x\Psi$ também será. Assim*[1]*,*

$$\Xi(x,t) = -\partial_x\Psi(x,t) = \frac{xe^{\frac{-x^2}{2(1+it)}}}{(1+it)^{\frac{3}{2}}}$$

é solução da equação de Schroedinger com condição inicial $\Xi(x,0) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Da unicidade das soluções de EDPs lineares, temos que essa é a função que procuramos.

Outra possível solução é usar a mesma dica do livro. devemos determinar $\chi(k)$ tal que

$$xe^{-\frac{x^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\chi(k)e^{ikx}dk.$$

Nós sabemos que

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{ikx}dk$$

tem como solução $\phi(k) = \frac{e^{-\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, vejam, por exemplo, o T3, e portanto teremos $\chi(k) = -ik\frac{e^{-\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. Nossa função será portanto

$$\sqrt{2\pi}\,\Xi(x,t) = -i\int_{-\infty}^{\infty}ke^{-\frac{k^2}{2}}e^{i\left(kx-\frac{k^2 t}{2}\right)}dk = -i\int_{-\infty}^{\infty}ke^{-(1+it)\frac{k^2}{2}+ikx}dk = -\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(1+it)\frac{k^2}{2}+ikx}dk.$$

Porém, essa última integral é exatamente a do livro

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(1+it)\frac{k^2}{2}+ikx}dk = e^{-\frac{x^2}{2(1+it)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+it}\,k-\frac{ix}{\sqrt{1+it}}\right)^2}dk = \sqrt{2\pi}\frac{e^{-\frac{x^2}{2(1+it)}}}{\sqrt{1+it}},$$

e teremos exatamente o mesmo resultado.

(c) (1 Ponto) Suponha agora que a função fosse

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)e^{i\left(kx-\frac{k^2t^2}{2}\right)}dk.$$

O que mudaria dos resultados anteriores? Em particular, qual EDP homogênea teria essa solução?

[1] Cultura alfabética: Ξ = ksi maiúsculo.

Solução. *Bem, basta fazer a mudança $t = \tau^2$ em todas as expressões. Notem que em momento nenhum integramos em t, portanto basta trocar $t = \tau^2$ nas expressões finais e depois, se quiser, "chamar τ de t", sem necessidade de cortar nada.* ☺

No caso da EDP, há uma pequena diferença, pois agora teremos $\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau}$, e a EDP fica

$$\tau \partial_x^2 \Psi = i\partial_\tau \Psi.$$

Notem que não é mais uma EDP de coeficientes constantes.

5. (2.5 Pontos) O volume de uma (hiper)-esfera de raio R em $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$V_n(R) = \alpha_n \int_0^\infty \theta(R-r) r^{n-1} dr,$$

sendo $\alpha_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. A área dessa mesma esfera é $A_n(R) = \frac{d}{dR}V_n(R)$. Seja $\gamma^{(n)}(R)$ uma distribuição tal que

$$\alpha_n \int_0^\infty \gamma^{(n)}(r-R) f(r) r^{n-1} dr = f(R),$$

para toda $f(r)$ suave, com $R > 0$. Para n fixo, proponha um aproximante para $\gamma^n(r-R)$ centrado em $r = R$ do tipo

$$\gamma_m^{(n)}(r-R) = \begin{cases} b_m, & r \in [R - \frac{1}{2m}, R + \frac{1}{2m}], \\ 0, & r \notin [R - \frac{1}{2m}, R + \frac{1}{2m}]. \end{cases}$$

Determine explicitamente b_m, incluindo o limite $m \to \infty$, e escreva $\gamma^{(n)}(r-R)$ em função da δ de Dirac usual.

Solução. *Nossos aproximantes $\gamma_m^{(n)}$ devem ser tais que*

$$\alpha_n \int_0^\infty \gamma_m^{(n)}(r-R) r^{n-1} dr = \alpha_n b_m \int_{R-\frac{1}{2m}}^{R+\frac{1}{2m}} r^{n-1} dr = \frac{\alpha_n b_m}{n}\left[\left(R + \frac{1}{2m}\right)^n - \left(R - \frac{1}{2m}\right)^n\right] = 1,$$

de onde temos

$$b_m = \frac{n}{\alpha_n\left[\left(R + \frac{1}{2m}\right)^n - \left(R - \frac{1}{2m}\right)^n\right]}.$$

Para o limite $m \to \infty$, note que

$$\left(R + \frac{1}{2m}\right)^n - \left(R - \frac{1}{2m}\right)^n = R^n\left[\left(1 + \frac{1}{2mR}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2mR}\right)^n\right] \approx R^n\left[\left(1 + \frac{n}{2mR} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{n}{2mR} + \cdots\right)\right] \approx \frac{nR^{n-1}}{m}$$

e portanto

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \frac{m}{\alpha_n R^{n-1}}.$$

Notem que $A_n(R) = \frac{d}{dR}V_n(R) = \frac{\alpha_n}{n}\frac{d}{dR}R^n = \alpha_n R^{n-1}$. Portanto, em termos da função $\delta(r-R)$ usual, temos

$$\gamma^n(r-R) = \frac{\delta(r-R)}{A_n(R)}.$$

Acertou quem desconfiou que há algo interessante "escondido" nesta questão. Vamos olhar com mais cuidado nosso coeficiente b_m. Notem que

$$\frac{1}{b_m} = \frac{\alpha_n}{n}\left(R + \frac{1}{2m}\right)^n - \frac{\alpha_n}{n}\left(R - \frac{1}{2m}\right)^n = V_n(R') - V_n(R' - \epsilon),$$

com $R' = R + \frac{1}{2m}$ *e* $\epsilon = \frac{1}{m}$. *Quer dizer,* $\frac{1}{b_m}$ *é diferença de volumes de duas esféricas concêntricas, ou melhor, o volume de uma casca esférica. Estamos interessados no limite* $m \to \infty$, *portanto podemos admitir* $0 < \epsilon \ll 1$. *Quer dizer, estamos interessado em cacas esféricas finas. Calculemos agora a razão entre o volume dessa casca esférica fina e o volume da esfera na qual ela está inscrita*

$$\frac{V_n(R') - V_n(R' - \epsilon)}{V_n(R')} = 1 - \left(\frac{R - \epsilon}{R}\right)^n .$$

Ocorre que para n *suficientemente grande, o último termo pode ser tão pequeno quando se queira. Quer dizer, o volume de uma casca esférica fina de raio externo* R' *é tão próximo quando se queira do volume da esfera que a contem em* $\mathbb{R}^n$, *para* n *suficientemente grande. Em outras palavras, para* n *suficientemente grande, a maior parte do volume de uma esfera está numa região arbitrariamente próxima da sua superfície!!! Este é mais um exemplo de que nossa intuição geométrica de* $\mathbb{R}^3$ *é boa apenas para ....* $\mathbb{R}^3$*!!!!*