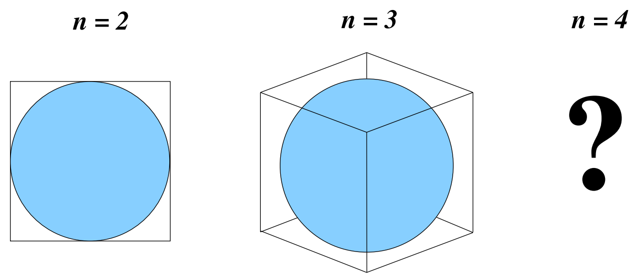
Cálculo II - Cursão - 2009

Exercício Extra



Hiperesferas, hipercubos e hiperconfusões

Resumo

As estranhas relações entre volumes e áreas de hiperesferas em diferentes dimensões é um problema clássico de Física-Matemática[1] (*Ops!* Cálculo II). Os fatos que vocês demonstrarão neste Exercício Extra devem servir como um alerta sobre as confusões muito comuns causadas pelo emprego de "analogias" bi e tridimensionais em dimensões maiores. As confusões surgem porque os resultados são contraditórios com nossa intuição formada a partir da nossa experiência bi e tridimensional. Os resultados ferem nosso "bom senso". Mas de que valerá nosso bom senso geométrico, forjado em nosso mundo tridimensional, em $\mathbb{R}^{37}$? Está pergunta, relevantíssima, nos remete à seguinte afirmação, atribuída a Einstein, *bom senso é conjunto da todos os preconceitos que adquirimos durante nossos primeiros dezoito anos de vida*. Prefiro uma outra elaboração sobre bom senso, mas essa é adequada aos nossos propósitos.

Este é um arquivo PDF com hiperlinks. Vocês podem imprími-lo sem problemas, mas devem estar conectados à INTERNET para terem acesso aos diversos links com materiais on-line. Os pontos que devem ser desenvolvidos e entregues estão indicados com "➪" ao longo do texto. Bom trabalho!

[1]Clique aqui e aqui para ler mais sobre Física-Matemática.

1 Hiperesferas e hipercubos

A esfera usual de raio r é uma superfície de $\mathbb{R}^3$ dada pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{1}$$

Chamaremos essa nossa esfera usual de S^2. O superescrito "2" se refere, obviamente, à dimensão da esfera, que por ser uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ tem $3 - 1 = 2$ dimensões. Isso implica, como sabemos, que S^2 pode ser parametrizada por 2 ângulos. Sabemos, também, que o volume e a área superficial de uma esfera de raio r valem

$$V_2 = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad \text{e} \quad A_2 = 4\pi r^2. \tag{2}$$

O menor cubo no qual a esfera S^2 pode ser inserida tem aresta $2r$. Já o maior cubo que pode ser inserido em S^2 terá aresta $r/\sqrt{3}$.

Esta análise pode também englobar facilmente a circunferência S^1 de raio r, que pode ser parametrizada por um só ângulo (tem dimensão 1) e corresponde a hipersuperfície de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{3}$$

Seu "volume" e sua "área" serão

$$V_1 = \pi r^2 \quad \text{e} \quad A_1 = 2\pi r. \tag{4}$$

Novamente, o menor "cubo" no qual esta circunferência pode ser inscrita corresponde ao quadrado de lado $2r$. Já o maior cubo que pode ser inscrito em S^1 tem lado $r/\sqrt{2}$.

Como já foi adiantado em aula, as "hiperconfusões" ocorrem quando comparamos volumes e áreas de hiperesferas em dimensões mais altas. Definimos uma hiperesfera S^n de raio r como a hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2. \tag{5}$$

A hiperesfera S^n pode, obviamente, ser parametrizada com n parâmetros. O menor hipercubo que a contém tem "aresta" $2r$. Já o maior hipercubo que pode ser inscrito em S^n terá aresta $r/\sqrt{(n+1)}$. O cálculo do volume englobado por uma hiperesfera de raio r

$$V_n = \int_D d\text{vol}, \tag{6}$$

sendo $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leq r^2\}$ é muito mais elaborado. Este é o ponto principal deste Exercício Extra (EE). Vocês devem calculá-lo introduzindo-se as coordenadas hiperesféricas, seguindo o roteiro da próxima seção. No final deste texto, há uma forma alternativa para o cálculo de V_n. Ela pode ser usada para "conferir" o resultado obtido. Ela também nos será útil, em particular, no próximo semestre, em Cálculo Numérico.

2 Coordenadas hiperesféricas

O cálculo de (6) é feito explicitamente na seção 11.33 do nosso livro texto. A idéia aqui é calcular V_n usando-se uma transformação de coordenadas, de euclidianas para hiperesféricas. As coordenadas hiperesféricas para $\mathbb{R}^{n+1}$ correspondem a $(n+1)$ números $(r, \theta_1, \ldots, \theta_n)$, sendo um raio r e n ângulos θ_i. As coordenadas polares e as esféricas usuais são, obviamente, casos particulares das hiperesféricas ($n = 1$ e $n = 2$, respectivamente). O primeiro passo para a construção das coordenadas hiperesféricas é encontrar uma parametrização para S^n. Este é o primeiro ítem deste EE.

➪ Mostre que uma hiperesfera S^n de raio r pode ser parametrizada por n ângulos θ_i, $i = 1..n$, sendo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & r\cos\theta_n \sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ x_2 & = & r\sin\theta_n \sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ x_3 & = & r\cos\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ x_4 & = & r\sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ \vdots & & \\ x_{n-1} & = & r\cos\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ x_n & = & r\cos\theta_2\sin\theta_1 \\ x_{n+1} & = & r\cos\theta_1 \end{array}\right. \tag{7}$$

com $\theta_i \in [0, \pi]$, $i = 1, \ldots, n-1$, e $\theta_n \in [0, 2\pi]$. Atenção às faixas de valores dos ângulos!

Podemos agora usar (7) como uma transformação de coordenadas e reescrever a integral (6).

➪ Mostre que, nas novas coordenadas (r, θ_i), $i = 1, \ldots, n$, a integral (6) fica

$$V_n = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{n-1} \int_0^{r} J dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} d\theta_n, \tag{8}$$

sendo

$$J = r^n \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{n-k}(\theta_k). \tag{9}$$

➪ Mostre, também, que a área de uma hiperesfera de raio r é dada por

$$\begin{aligned} A_n(r) &= 2\pi r^n \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{n-1} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin^{n-k}(\theta_k) \right) d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \\ &= 2\pi r^n \prod_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} \sin^{n-k}(\theta_k)\, d\theta_k \right) \end{aligned} \tag{10}$$

e que

$$A_n(r) = \frac{d}{dr} V_n(r). \tag{11}$$

Agora, só nos resta calcular (10)!

➪ Calcule (10). Dica: este cálculo envolve integrais do tipo

$$\int_0^{\pi} \sin^m x\, dx, \tag{12}$$

com $m = 1, 2, \ldots$ Elas podem ser calculadas recursivamente. Notem que

$$\begin{aligned} \int \sin^m x\, dx &= \int \sin^{m-1} x \sin x\, dx \\ &= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx, \end{aligned} \tag{13}$$

sendo que uma integração por partes foi feita na última passagem. Usando-se a identidade trigonométrica fundamental obtém-se finalmente

$$\int_0^{\pi} \sin^m x\, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi} \sin^{m-2} x\, dx \tag{14}$$

para $m > 1$.

3 Hiperconfusões

Calculados os volumes $V_n(r)$, podemos começar a exibir os paradoxos. Considere, por exemplo, hiperesferas unitárias, *i.e.*, $r = 1$. Hipercubos unitários tem sempre volume unitário, em qualquer dimensão. E as hiperesferas?

- ➪ Faça um "gráfico" de $V_n(1)$, com $n = 1, 2, \ldots$ Mostre que $V_n(1)$ cresce para n pequenos, mas decresce para n grandes. Mostre que há um "máximo" entre $n = 4$ e $n = 5$. Mostre que

$$\lim_{n \to \infty} V_n(1) = 0. \tag{15}$$

  Note que $V_n(1)$ também pode ser visto como a razão dos volumes de uma hiperesfera de raio r e de um hipercubo de aresta r. Em outras palavras, volumes de hipercubos crescem muito mais rápido do que volumes de hiperesferas. De fato, não há nada de paradoxal nisto, como veremos a seguir.

- ➪ Considere os hipercubos em que S^n está inscrita e os hipercubos inscritos em S^n. Sejam $V_n^e(r)$ e $V_n^i(r)$, respectivamente, seus volumes. Estude, graficamente, as seguintes razões

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{V_n(r)}{V_n^e(r)}, \\ \beta_n &= \frac{V_n(r)}{V_n^i(r)}, \\ \gamma_n &= \frac{V_n^i(r)}{V_n^e(r)}. \end{aligned} \tag{16}$$

  O que você conclui do comportamento destas razões? Há algum paradoxo aqui?

4 Gaussianas e a função $\Gamma(x)$

O livro texto calcula $V_n(r)$ usando a função $\Gamma(x)$. Trata-se de uma função "tradicional" da Física-Matemática, mas vocês já tem todos os elementos necessários para entendê-la. É um clássico caso de uma primitiva que não pode ser expressa em termos de funções elementares. Sua definição é

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} \, ds. \tag{17}$$

Apesar de não ser expressa em termos de funções elementares, a função $\Gamma(x)$ é muito bem conhecida. Em particular, pode-se mostrar, de várias maneiras (tentem!), que seus valores quando restrita a inteiros são

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{18}$$

Uma outra integral muito comum em diversos problemas é a integral Gaussiana

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx. \tag{19}$$

Ela está relacionada com a função $\Gamma(x)$. Com a mudança de variáveis $x^2 = t$, tem-se

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{20}$$

Há várias maneiras de se calcular a integral Gaussiana I. Talvez a mais simples seja esta. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}. \tag{21}$$

Calculemos a seguinte integral

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)}\, da, \tag{22}$$

sendo D o plano inteiro. É fácil mostrar que

$$\int_D e^{-(x^2+y^2)}\, da = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right) dy = I^2. \tag{23}$$

Porém, (22) pode ser facilmente calculada em coordenadas polares

$$\begin{aligned}\int_D e^{-(x^2+y^2)}\, da = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\, dr &= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \\ &= \pi, \end{aligned} \tag{24}$$

de onde segue que $I = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Calcularemos, usando a função $\Gamma(x)$, $A_n(r)$. Os volumes correspondentes podem ser calculados usando-se (11). De fato, só nos interessa a área de um hiperesfera unitária $A_n = A_n(1)$. Consideremos a seguinte quantidade

$$\mathcal{I} = A_n \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^n\, ds. \tag{25}$$

Fazendo-se a mudança de variável $s^2 = t$, tem-se

$$\mathcal{I} = \frac{A_n}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}}\, dt = \frac{A_n}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \tag{26}$$

Porém, note que (25) pode ser escrita como

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{n-1} \int_0^\infty e^{-r^2} J dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} d\theta_n, \tag{27}$$

sendo que (10) foi usada e J é o determinante Jacobiano (9). Pode-se, agora, escrever (27) em coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n+1} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2)}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+1} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds \right)^{n+1} \\ &= \pi^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Combinando-se com (26) tem-se finalmente

$$A_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \tag{29}$$