Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 6 (Último!!!!) - MS550 - Métodos Matemáticos I, 12 de junho de 2023.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Fenômenos de convecção-difusão

Diversos processos físicos que envolvem simultaneamente fenômenos de difusão e convecção são descritos pela chamada equação do calor com convecção, cuja versão unidimensional é

$$\partial_t u = \kappa \partial_x^2 u + c\partial_x u, \tag{1}$$

sendo $\kappa, c \in \mathbb{R}$ dois parâmetros aqui considerados constantes, respectivamente, o coeficiente de difusão e a velocidade associada à convecção. O coeficiente de difusão é comumente considerado positivo. Apesar de ter sua origem na descrição de fenômenos de transporte na Física, equações parabólicas como (1), ou mesmo a mais famosa delas (link no pdf), encontram diversas aplicações nas mais variadas áreas. Nesta tese (link no pdf), por exemplo, há aplicações interessantes dessas equações parabólicas em diversos cenários sócio-econômicos.

1. (2 Pontos) Faça uma separação de variáveis do tipo $u(x,t) = v(x)T(t)$, escreva as equações para $v(x)$ e $T(t)$ e resolva a equação temporal. Neste estágio, o que se pode afirmar sobre a constante de separação que chamaremos de $-\lambda$?
2. (2 Pontos) Escreva a equação satisfeita por $v(x)$ em sua forma auto-adjunta.
3. Resolva **completamente** o problema de Sturm-Liouville associado, *i.e.*, obtenha o espectro, as autofunções associadas e produto interno no qual elas são ortogonais para as seguintes condições de contorno:
   (a) (2 Pontos) $u(0,t) = u(L,t) = 0$.
   (b) (4 Pontos) $u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0$. Neste item em particular, não é necessário resolver a equação de autovalores, mas identifique a natureza de suas soluções (complexas/reais, finitas/infinitas, contínuas/discretas, etc).
4. (2 Pontos) Do ponto de vista da evolução temporal neste problema, o que significa ter autovalores não positivos no espectro de SL (admitindo-se sempre $\kappa > 0$)? Seria possível obter um autovalor nulo para uma condição de contorno do tipo $u(0,t) = \alpha_1 u(L,t) + \alpha_2 \partial_x u(L,t) = 0$? Discuta.

Soluções.

1. $\kappa v'' + cv' = -\lambda v, \quad T' = -\lambda T$. *A solução da equação temporal é* $T(t) = Ae^{-\lambda t}$, *sendo* A *uma constante arbitrária. Neste estágio, não há nenhuma restrição sobre a constante de separação* λ.
2. *A equação para* v *é*
$$v'' + \frac{c}{\kappa}v' = -\frac{\lambda}{\kappa}v.$$
Devemos multiplicar ambos os lados por uma função $f(x)$ *a fim de termos*
$$f(x)v'' + \frac{c}{\kappa}f(x)v' = \frac{d}{dx}\left(f(x)v'\right) = -\frac{\lambda}{\kappa}f(x)v,$$
de onde temos que
$$f' = \frac{c}{\kappa}f, \quad \Rightarrow f = e^{\frac{cx}{\kappa}}.$$
Finalmente, a equação para $v(x)$ *em sua forma auto-adjunta é*
$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{cx}{\kappa}}v'\right) = -\frac{\lambda}{\kappa}e^{\frac{cx}{\kappa}}v.$$

3. *Independente de estar em forma auto-adjunta ou não, a equação é a do oscilador harmônico amortecido, portanto de solução bem conhecida:*

$$v(x) = e^{-\frac{cx}{2\kappa}} \left(A \cos \varpi x + B \sin \varpi x \right),$$

sendo $\varpi^2 = \frac{\lambda}{\kappa} - \left(\frac{c}{2\kappa}\right)^2$. *Devemos agora aplicar as diferentes condições de contorno.*

   (a) $u(0,t) = u(L,t) = 0$. *Este item é equivalente ao caso já amplamente discutido. Teremos* $\varpi = \frac{n\pi}{L}$, *com* $n = 1,2,3,\dots$. *A solução do problema de SL será*

$$\frac{\lambda_n}{\kappa} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\kappa}\right)^2, \quad v_n(x) = e^{-\frac{cx}{2\kappa}} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

   com $n = 1,2,3,\dots$. *Estas autofunções são ortogonais segundo o produto interno*

$$(f,g) = \int_0^L e^{\frac{cx}{\kappa}} \bar{f} g dx.$$

   (b) $u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0$. *A primeira condição de contorno implica* $A = 0$, *e portanto as autofunções também serão da forma*

$$v = e^{-\frac{cx}{2\kappa}} \sin \varpi x,$$

   que por sua vez implica em

$$v'(x) = e^{-\frac{cx}{2\kappa}} \left(\varpi \cos \varpi x - \frac{c}{2\kappa} \sin \varpi x \right).$$

   A segunda condição de contorno é, portanto, equivalente a

$$\varpi \cos \varpi L = \frac{c}{2\kappa} \sin \varpi L.$$

   É conveniente dividir o problema em dois casos: $c = 0$ *e* $c \neq 0$. *Para o primeiro caso, temos diretamente* $\varpi = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$, *e a solução do problema de SL será*

$$\frac{\lambda_n}{\kappa} = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\kappa}\right)^2, \quad v_n(x) = e^{-\frac{cx}{2\kappa}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L},$$

   com o mesmo produto interno do item anterior.

   O caso $c \neq 0$ *é mais sutil, não é possível, a priori, descartar soluções complexas para* ϖ. *Porém, sabemos que* λ *deve ser real e, dessa maneira,* ϖ *deve ser um real ou um imaginário puro. No caso de* ϖ *real, teremos*

$$\frac{2\kappa}{cL} \varpi L = \tan \varpi L,$$

   de onde vemos que os autovalores correspondem aos pontos $x \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\frac{2\kappa}{cL} x = \tan x.$$

   É fácil ver graficamente que está equação tem infinitas soluções discretas x_n^*, *e teremos* $\varpi_n = x_n^*/L$. *Os autovalores/autofunções associados serão*

$$\frac{\lambda_n}{\kappa} = \left(\frac{x_n^*}{L}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\kappa}\right)^2, \quad v_n(x) = e^{-\frac{cx}{2\kappa}} \sin \frac{x_n^*}{L} x,$$

   também ortogonais segundo o mesmo produto interno do item anterior. (Fez até aqui, leva 2 pontos só.)

   Resta analisarmos o caso de $\varpi = i\nu$ *imaginário puro. A equação para os autovalores neste caso é*

$$i\nu \cos i\nu L = \frac{c}{2\kappa} \sin i\nu L,$$

que é equivalente a

$$\frac{2\kappa}{cL}\nu L = \tanh \nu L.$$

Assim, teremos também soluções imaginárias para ϖ se houver soluções para a equação

$$\frac{2\kappa}{cL}x = \tanh x,$$

com $x \in \mathbb{R}$. Graficamente, é fácil ver que esta equação tem uma única solução (positiva) se $0 < \frac{2\kappa}{cL} < 1$. Vamos chamá-la de x_0^*. Se $\frac{2\kappa}{cL} \geq 1$ ou se $\frac{2\kappa}{cL} < 0$, a única solução dessa equação é a trivial e os autovalores e auto-funções correspondentes serão apenas aqueles com ϖ real. Porém, para $0 < \frac{2\kappa}{cL} < 1$, há efetivamente um autovalor e uma autofunção extras:

$$\frac{\lambda_0}{\kappa} = \left(\frac{c}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{x_0^*}{L}\right)^2, \quad v_0(x) = e^{-\frac{cx}{2\kappa}} \sinh \frac{x_0^*}{L}x.$$

O produto interno relevante é sempre o mesmo do item anterior.

4. *Como as soluções temporais são do tipo $T = Ae^{-\lambda_n t}$, um autovalor não positivo implicaria numa solução que não tende a zero para $t \to \infty$. De fato, autovalores negativos implicariam em soluções crescentes, o que certamente corresponderia a um comportamento inusitado para um problema de convecção-difusão.*

   Antes de passarmos ao segundo item da questão, é interessante notar que nenhuma das condições de contorno do item anterior dá origem a autovalores não positivos. A única dúvida é o caso de λ_0

$$\frac{\lambda_0}{k} = \left(\frac{c}{2\kappa}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{2\kappa x_0^*}{cL}\right)^2\right),$$

   porém é fácil ver da equação que define x_0^* que

$$\frac{2\kappa x_0^*}{cL} < 1.$$

   Há uma outra maneira de concluirmos que não há autovalores negativos para essas condições de contorno. Partindo-se da equação de Sturm-Liouville do item 2, multiplicando-se ambos os lados por v e fazendo-se uma integração por partes, ficamos com

$$e^{-\frac{cx}{\kappa}} y(x)y'(x)\Big|_0^L - \int_0^L e^{-\frac{cx}{\kappa}} (y')^2 dx = -\frac{\lambda}{\kappa}\int_0^L e^{-\frac{cx}{\kappa}} y^2 dx.$$

   Ocorre que o termo dos extremos é sempre zero para as condições de contorno do caso anterior. Como as integrais são ambas positivas, temos finalmente $\lambda > 0$. É claro que ficamos com uma questão interessante aqui. Seria possível ter outras condições de contorno que implicassem em possíveis autovalores negativos? É aqui que se encaixa o segundo item da questão.

   Da separação de variáveis, temos que uma solução com $\lambda = 0$ obedecerá a equação

$$v'' + \frac{c}{\kappa}v' = 0,$$

   cuja solução geral é $v = A + Be^{-\frac{cx}{\kappa}}$. A questão aqui é se essa solução é ou não compatível com a condição de contorno $u(0,t) = \alpha_1 u(L,t) + \alpha_2 \partial_x u(L,t) = 0$. A resposta é claramente sim. Da primeira condição, temos $B = -A$. Da segunda condição, teremos

$$\alpha_1 \left(1 - e^{-\frac{cL}{\kappa}}\right) + \frac{c\alpha_2}{\kappa} e^{-\frac{cL}{\kappa}} = 0,$$

   de onde temos que para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\kappa}{c}\left(1 - e^{\frac{cL}{\kappa}}\right),$$

teremos uma autofunção $v = 1 - e^{-\frac{cx}{\kappa}}$ *com autovalor associado nulo. Notem que esta autofunção dá origem a uma solução* $u(x,t)$ *que é* **constante** *no tempo. Obviamente, num sistema com dissipação* ($\kappa > 0$)*, isto só pode ocorrer porque o sistema* **não** *é isolado, de alguma maneira essa condição de contorno "bombeia" energia para dentro do sistema.*