Nome: ______________________________ RA: __________________

TESTE 5 - MS550 - Métodos Matemáticos I, 29 de maio de 2023.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Vibrações livres de uma membrana circular

As vibrações livres $u(r,\theta,t)$ de uma membrana circular homogênea são descritas pela equação da onda em coordenadas polares

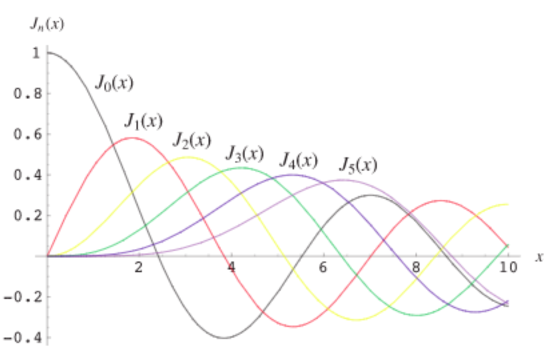
$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

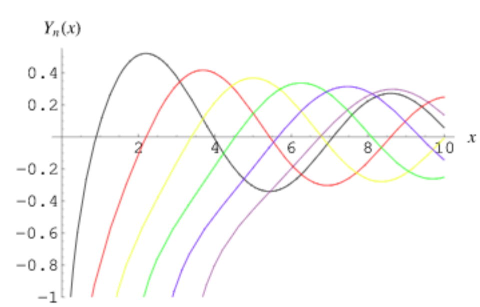
sendo v a velocidade de propagação da onda e $u(r,\theta,t) = 0$ a configuração de equilíbrio estático. Temos interesse no caso da membrana circular de raio a com borda fixa, *i.e.*, o caso descrito pela condição de contorno de Dirichlet $u(a,\theta,t) = 0$.

1. (2 Pontos) Faça uma separação de variáveis do tipo $u(r,\theta,t) = v(r,\theta)T(t)$, escreva as equações para $v(r,\theta)$ e $T(t)$ e resolva a equação temporal. Neste estágio, o que se pode afirmar sobre a constante de separação que chamaremos de $-\varpi^2$?
2. (2 Pontos) Faça uma separação de variáveis do tipo $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ para a equação obtida no item anterior para $v(r,\theta)$ e escreva as equações para $R(r)$ e $\Theta(\theta)$. O que se pode concluir sobre a nova constante de separação, a qual chamaremos de m^2? Neste estágio, há algum vínculo sobre a constante de separação $-\varpi^2$?
3. (4 Pontos) Usando as informações do formulário, imponha a condição de Dirichlet no problema. Lembrem-se que a membrana é circular, homogênea e "suave". Neste estágio, o que se pode afirmar sobre a constante de separação que chamaremos de $-\varpi^2$?
4. (2 Pontos) Usando as informações do formulário, identifique as (auto-)funções $v(r,\theta)$ correspondentes aos 5 primeiros modos de vibração da membrana, em ordem crescente de frequência.
5. (2 Pontos) Sabe-se que para determinadas membranas, $v = 400$m/s. Determine o raio aproximado a, em centímetros, para que esta membrana tenha uma frequência fundamental (a menor frequência de vibração) de 330Hz. (Lembrem-se que 1Hz $= 2\pi$ rad/s).

Formulário

A equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$, para m inteiro, tem como solução geral $y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x)$, sendo $J_m(x)$ e $Y_m(x)$, respectivamente, as funções de Bessel de primeira e segunda espécie, cujos comportamentos típicos perto da origem estão nos gráficos abaixo. Em particular, o primeiro zero da função $J_0(x)$ está aproximadamente em $x = 2.4048$.





Soluções.

1. $\nabla^2 v = -\varpi^2 v$, $\quad T'' = -(v\varpi)^2 T$. *A solução da equação temporal é* $T(t) = A\cos v\varpi t + B\sin v\varpi t$, *sendo* A *e* B *constantes arbitrárias. Neste estágio, não há nenhuma restrição sobre a constante de separação* ϖ. *By the way, o nome dessa letra é "pi", não omega, nem omega cortado. Sim, os gregos tem mais de uma grafia para a letra pi...*

2. *Após a separação de variáveis, ficamos com*

$$r^2 R'' + rR' + \left(\varpi^2 r^2 - m^2\right) R = 0 \quad \text{e} \quad \Theta'' + m^2\Theta = 0.$$

A solução em θ *será* $\Theta(\theta) = C\cos(m\theta + \phi)$, *sendo* C *and* ϕ *constantes arbitrárias. A exigência de periodicidade em* θ, *inerente das coordenadas polares, impõe que* m *deve ser um inteiro. Neste estágio, não há nenhuma restrição sobre a constante de separação* ϖ.

3. *Com as informações do formulário, temos que a solução radial geral será* $R(r) = AJ_m(\varpi r) + BY_m(\varpi r)$, *sendo* A *e* B *constantes arbitrárias. Do formulário, vemos que as funções* $Y_m(\varpi r)$ *divergem na origem, então devemos ter* $B = 0$. *Para que tenhamos soluções não triviais com a condição de Dirichlet, devemos ter* $J_m(\varpi a) = 0$, *isto é,* ϖa *deve coincidir com os zeros das funções de Bessel de primeira espécie. Isto restringe os valores da constante de separação* ϖ, *que agora são um conjunto infinito contável de valores.*

4. *De acordo com o formulário, os 5 primeiros zeros das funções de Bessel de primeira espécie são: primeiro zero de* J_0, *primeiro zero de* J_1, *primeiro zero de* J_2, *segundo zero de* J_0 *e primeiro zero de* J_3. *As autofunções correspondentes são*

$$v = J_0(\varpi_{10} r),\ v = J_1(\varpi_{11} r)\cos(\theta + \phi),\ v = J_2(\varpi_{12} r)\cos(2\theta + \phi),\ v = J_0(\varpi_{20} r),\ v = J_3(\varpi_{13} r)\cos(3\theta + \phi),$$

sendo ϕ *fases arbitrárias e* $\varpi_{nm} = \frac{1}{a} z_{nm}$, *sendo* z_{nm} *o n-ésimo zero da função* $J_m(x)$.

5. *Essa velocidade é uma velocidade típica de ondas em certas cordas de um violão clássico. 330Hz é aproximadamente a frequência da nota Mi mais aguda (E4) num violão clássico. De acordo com o formulário, temos* $z_{10} = 2.4048$. *Para que tenhamos a frequência do Mi (E4), nossa membrana deve ter um raio* a *tal que*

$$v\varpi_{10} = 400 \times \frac{2.4048}{a} = 2\pi \times 330, \quad a \approx 46\text{cm}.$$