Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 4 - MS550 - Métodos Matemáticos I, 15 de maio de 2023.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Para os itens abaixo, sugere-se o uso da função gama

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

1. Calcule:
   (a) (4 Pontos) $\int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$.
   (b) (4 Pontos) $\int_{-\infty}^\infty e^{x-2^x} dx$.
2. (4 pontos) Interprete o limite $\alpha \to \infty$ do item (a) da questão anterior. Comente não só o valor da integral nesse limite, mas também a forma do integrando.

Solução do item 1a. *Fazendo-se a substituição de variáveis $t = x^\alpha$, $dt = \alpha x^{\alpha-1} dx$, a integral fica*

$$\int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\alpha t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Solução do item 1b. *Fazendo-se a substituição de variáveis $t = 2^x = e^{x \log 2}$, $dt = (\log 2) 2^x dx$, a integral fica*

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{\log 2}} e^{-t} \frac{dt}{t \log 2} = \frac{1}{\log 2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{\log 2}-1} dt = \frac{1}{\log 2}\Gamma\left(\frac{1}{\log 2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\log 2}\right).$$

Alguns comentários que acho que valem a pena sobre este item.

1. *O Wolfram Alpha não consegue calcular essa integral analiticamente, confiram aqui. Nem o Mathematica, nem o Maple conseguiram. Isso mostra duas coisas. Primeiro, MS550 > Wolfram e assemelhados. Segundo, esse festival de bullshit que vcs vêm por ai sobre AI dominando o mundo é, por enquanto, só bullshit jornalístico mesmo.*
2. *Essa integral pode ser facilmente generalizada como*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{x-\alpha^x} dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\log \alpha}\right)$$

pra todo $\alpha > 1$, confiram!

Solução do item 2. *Primeiro, vejam que*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx = \lim_{\alpha\to\infty} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 1.$$

Isto vale dois pontos. Os outros dois pontos devem vir da análise do integrando, quer dizer, da análise da função

$$f(x) = \lim_{\alpha\to\infty} e^{-x^\alpha}$$

para $x \geq 0$. Trata-se de uma função degrau

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

cuja integral é 1, como esperado. Notem que $f(1) = 1/e$, mas isso é irrelevante para a integral. O gráfico da Fig. 1 mostra o aspecto dessa função para alguns valores de α. É claro que o comportamento dessa função vem do

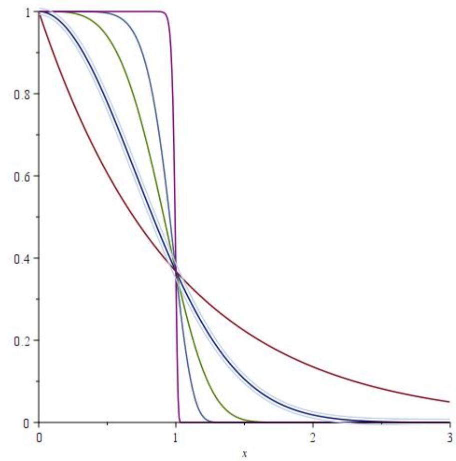

Figura 1: Gráfico de $e^{-x^{\alpha}}$ para $\alpha = 1, 2, 4, 8$ e 64. É claro que para $\alpha \to \infty$ essa função converge para uma função degrau.

comportamento de x^{α} para $\alpha \to \infty$, que corresponde a

$$\lim_{\alpha \to \infty} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$

Um exercício interessante, o qual eu recomendo fortemente, é repetir essa análise para o caso da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x - \alpha^{x}} dx,$$

para $\alpha > 1$.