Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 3 - MS550 - Métodos Matemáticos I, 17 de abril de 2023.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Polinômios de Chebyshev

Os chamados polinômios de Chebyshev (as vezes também grafado como Tchebychev) são soluções polinomiais da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+\alpha^2 y=0, \tag{1}$$

a qual, de maneira não muito surpreendente, é também conhecida como equação de Chebyshev. Os polinômios de Chebyshev são muito uteis em diversas áreas, notadamente em Teoria de Aproximação.

1. (4 Pontos) Aplique o método de Frobenius em torno do ponto $x=0$ para a equação (1), obtenha as respectivas relações de recorrência, mostre que haverá soluções pares e ímpares e escreva o termo geral das séries pares e ímpares.
2. (3 Pontos) Os polinômios de Chebyshev $T_n(x)$ são as soluções polinomiais de (1) com $T_n(1)=1$. Para que valores de α a equação (1) admitirá soluções polinomiais (séries truncadas)? Escreva explicitamente pelo menos 3 destes polinômios.
3. (3 Pontos) Inspirado no problema 8 do livro, faça a mudança de variáveis $x=\cos\theta$ em (1) e resolva a equação na nova variável θ. O que este resultado implica para os polinômios de Chebyshev?

Solução do item 1. *Como $x=0$ é um ponto ordinário da a EDO (1), podemos procurar soluções na forma $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Substituindo-se na EDO chegamos na seguinte relação para os coeficientes*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)a_n x^{n-2}+(\alpha^2-n(n-1)-n)a_n x^n\right]=0,$$

que pode ser escrita como

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}-\left(k^2-\alpha^2\right)a_k\right]x^k=0,$$

de onde temos a seguinte relação de recorrência para os coeficientes a_k

$$a_{k+2}=\frac{k^2-\alpha^2}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad k=0,1,2,\ldots$$

É evidente que podemos dividir as soluções entre as pares, para as quais $a_1=0$, e consequentemente todos os termos impares da série se anulam, e as ímpares, para as quais $a_0=0$. Para a solução par, teremos

$$a_{2n}=\frac{a_0}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(4k^2-\alpha^2\right), \quad n=1,2,\ldots$$

e, de maneira equivalente, para a solução impar teremos

$$a_{2n+1}=\frac{a_1}{(2n+1)!}\prod_{k=0}^{n-1}\left((2k+1)^2-\alpha^2\right), \quad n=1,2,\ldots$$

Curiosidade: os produtórios podem ser expressos em forma fechada utilizando a função $\Gamma(x)$, veremos em breve como. A construção, porém, é simples. Notem, por exemplo, que o primeiro produtório pode ser escrito como

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(4k^2-\alpha^2\right)=4\prod_{k=0}^{n-1}\left(k-\frac{\alpha}{2}\right)\left(k+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Atentem a estrutura desses produtos. São do tipo

$$\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(2+\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(n-1+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Estes produtos são frequentes e recebem o nome de fatorial ascendente (ou descendente, depende do caso), e podem ser expressos em termos dos chamados símbolos de Pochhammer. O produtório da série impar pode ser expresso de maneira semelhante.

Solução do item 2. *Da solução do item anterior, vemos que a solução em série corresponderá a um polinômio se, e somente se, α for um inteiro. Para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ vemos que a solução polinomial correspondente T_n será um polinômio de grau n e de paridade $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. Em particular, teremos as seguintes 4 soluções polinomiais*

$$T_0(x) = a_0, \quad T_1(x) = a_1 x, \quad T_2(x) = a_0\left(1-2x^2\right), \quad T_3(x) = a_1\left(x-\frac{4}{3}x^3\right), \quad \ldots$$

Os coeficientes a_0 e a_1, para cada polinômio, devem ser determinados levando-se em conta a condição $T_n(1) = 1$ que define os polinômios de Chebyshev. Finalmente, temos os seguintes exemplos mais simples de polinômios de Chebyshev:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \ldots$$

Solução do item 3. *Com a mudança de variáveis $x = \cos\theta$, temos*

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{d}{dx} = \sin^2\theta\frac{d^2}{dx^2} - \cos\theta\frac{d}{dx} = \left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}.$$

Inspecionando-se (1), vemos que este resultado permite escrevê-la como

$$\ddot{y} + \alpha^2 y = 0,$$

sendo que o ponto aqui denota derivada em relação a θ. A solução geral desta equação é bem conhecida e é dada por $y(\theta) = A_\alpha \cos\alpha\theta + B_\alpha \sin\alpha\theta$. Os polinômios de Chebyshev são soluções de (1) com $\alpha = n$ inteiro. Este resultado nos garante que os polinômios T_n em função nova variável $x = \cos\theta$ podem ser escritos como combinação linear das funções trigonométricas elementares(!)

$$T_n(\cos\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

(Basta concluir isto para ter 100% do item.) A condição $T_n(1) = 1$ aqui corresponde a tomar $A_n = 1$, pois $x = 1$ corresponde a $\theta = 0$. Para n ímpar, $T_n(0) = 0$. Como $x = 0$ corresponde a $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos $B_n = 0$ para n ímpar. Por outro lado, para n par, $T_n'(0) = 0$, que implica $\dot{T}_n(0) = 0$ e, consequentemente, também em $B_n = 0$ para n par. Assim, ficamos finalmente com o curioso resultado

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta,$$

que é uma outra definição dos polinômios de Chebyshev. Verifiquem como obter os exemplos do item anterior a partir desta definição!

Uma consequência importante dessa representação trigonométrica é que as raízes dos polinômios de Chebyshev $T_n(x)$ serão sempre dadas por

$$x_k = \cos\frac{\pi}{2n}(2k+1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Esta distribuição não uniforme das raízes no intervalo $[-1, 1]$ está por trás da versatilidade dos polinômios de Chebyshev como "aproximadores", minimizando, por exemplo, o conhecido fenômeno de Runge. De maneira semelhante, seus pontos críticos (mínimos e máximos) também serão dados por expressões trigonométricas semelhantes. (Mostrem!) Porém, a consequência mais curiosa é, na minha opinião, esta:

$$T_m(T_n(x)) = T_m(\cos n\theta) = \cos mn\theta = T_{mn}(x),$$

i.e., *o conjunto de polinômios de Chebyshev é fechado com respeito a composição, que de fato é comutativa! Trata-se de um semigrupo (não tem inversa) comutativo.*