Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 2 - MS550 - Métodos Matemáticos I, 3 de abril de 2023.

(**Atenção:** *Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.*)

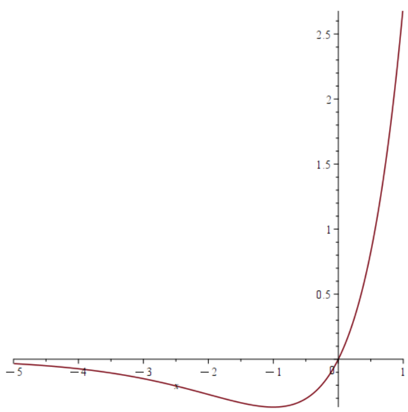
Para os itens abaixo, considere a função $W(z)$ de Lambert, definida como sendo a inversa da função $f(z) = ze^z$, para $z \in \mathbb{C}$. Trata-se de uma função com várias propriedades interessantes e comumente encontrada em problemas físicos, vejam, por exemplo seu verbete na wikipedia.

1. (3 Pontos) Caracterize a existência e unicidade de $W(x)$, como função real, para $x \in \mathbb{R}$.
2. (4 Pontos) Mostre que $W(x)$ existe, como função complexa, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. Para cada valor de x, quantos valores de $W(x)$ complexos devemos esperar? Justifique.
3. (3 Pontos) Calcule explicitamente pelo menos um dos valores correspondentes a $W\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

(Dica para os itens 2 e 3: notem que vocês estão interessados na função $W(x) = z$ tal que $x = ze^z$, com $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, e explorem a representação cartesiana de z.)

Solução.

1. *Como funcão real, $W(x)$ é a inversa de $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$, cujo gráfico, que vai abaixo, é útil aqui.*



Notem que para $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$, enquanto que para $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$. Da derivada $f'(x) = (x+1)e^x$, vemos que $f(x)$ tem um mínimo global para $x = -1$, com $f(-1) = -1/e$. Portanto, do gráfico, conclui-se que:

- *para $x < -1/e$, $W(x)$ não está definida como função real;*
- *para $x = -1/e$, $W(x) = -1$;*
- *para $-1/e < x < 0$, há dois possíveis valores reais para $W(x)$;*
- *e, finalmente, para $x \geq 0$, $W(x)$ tem valor único. Em particular, $W(0) = 0$.*

2. *Pela definição, $W(x) = z$ tal que $x = ze^z$. Seja $z = a + ib$. Temos*

$$x = ze^z = (a+ib)e^{a+ib} = e^a\left(a\cos b - b\sin b\right) + ie^a\left(b\cos b + a\sin b\right).$$

A primeira observação é que $x = 0$ tem como solução única $a = b = 0$ (Mostre!), sugerindo fortemente que se trata de um ponto de ramificação. Para que x seja real não nulo, precisamos que

$$\Im x = e^a\left(b\cos b + a\sin b\right) = 0 \Rightarrow a\sin b = -b\cos b,$$

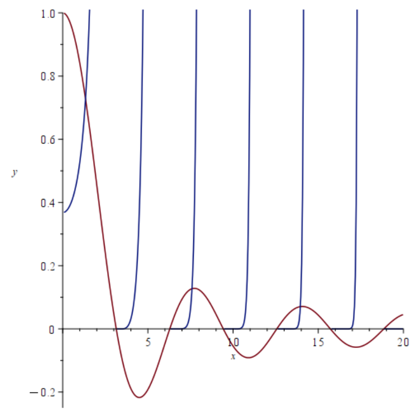
que admite duas soluções: ou $b = 0$, sem restrições para a, ou $a = -b \operatorname{cotan} b$. Para $b = 0$, z é na prática um real, e estamos na situação do item anterior. Vamos, portanto, nos centrar no caso $b \neq 0$:

$$x = ze^z = -\frac{b}{\sin b} \exp\left(-b \operatorname{cotan} b\right).$$

Portanto, para $x \neq 0$, $W(x) = -b \operatorname{cotan} b + ib$, sendo $b \neq 0$ uma solução para a equação transcendental

$$-x\frac{\sin b}{b} = \exp\left(-b \operatorname{cotan} b\right).$$

Ocorre que esta equação para $x \neq 0$ tem **infinitas** soluções. Como as duas funções de b nos dois lados da equação são pares, vamos nos restringir a $b > 0$. As soluções da equação transcendental correspondem aos encontros das curvas do lado direito e do lado esquerdo da equação, veja o gráfico abaixo.



A função do lado esquerdo, é uma senoide "amortecida", com zeros nos pontos $b = n\pi$, pontos nos quais o argumento da exponencial do lado direito diverge. Suponha $x < 0$ (o caso $x > 0$ é completamente análogo). Para $b \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$, $n \geq 1$, a função do lado esquerdo tem um único máximo e se anula nos extremos do intervalo. Neste mesmo intervalo, o argumento da exponencial vai de $-\infty$ a ∞, e portanto a função do lado direito vai de 0 a ∞, cruzando, necessariamente, com a função do lado esquerdo, implicando que há um zero para a equação transcendental em cada um dos intervalos $b \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$, $n \geq 1$.

3. $W\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ corresponde a $z = a + ib$ tal que

$$-\frac{\pi}{2} = e^a\left(a\cos b - b\sin b\right) + ie^a\left(b\cos b + a\sin b\right),$$

que tem como solução mais simples $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$. Portanto, $W\left(-\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\pi}{2}$ é um dos valores. Uma das aplicações mais curiosas da função W de Lambert vem da operação de iteração da exponenciação e seu limite infinito. Vejam tetration na wikipedia.