

Nome: \_\_\_\_\_

RA: \_\_\_\_\_

TESTE 1 - MS550 - Métodos Matemáticos I, 20 de março de 2023.

(Atenção: Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)

Considere as afirmações abaixo, que dizem respeito a funções suaves  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Prove as verdadeiras e de um contra-exemplo para as falsas. Lembrando, as coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$  são tais que

$$\begin{cases} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi, \\ z = z, \end{cases}$$

e para coordenadas curvilíneas genéricas  $(q_1, q_2, q_3)$ , os operadores gradiente e divergente são dados por

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \hat{e}_3 \\ \nabla \cdot (v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 v_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 v_3) \right) \end{aligned}$$

1. (2 Pontos)  $\hat{e}_\phi \cdot \nabla \varphi = 0$ , se  $\varphi = \varphi(x^2 + y^2)$ .

**Solução.** Verdadeira. Notem que  $\varphi(x^2 + y^2) = \varphi(r)$ , que implica em  $\partial_\phi \varphi = 0$ , de onde segue o resultado.

2. (2 Pontos)  $\hat{e}_\phi \cdot (\hat{e}_r \times \nabla \varphi) = 0$  para qualquer  $\varphi$  suave.

**Solução.** Falsa. Basta tomar  $\varphi = z$ , e teremos  $\nabla \varphi = \hat{e}_z$ .

3. (2 Pontos)  $\hat{e}_r \times (\hat{e}_z \times \nabla \varphi) = 0$ , para qualquer  $\varphi$  suave.

**Solução.** Falsa. Basta tomar  $\varphi = r$ , e teremos  $\nabla \varphi = \hat{e}_r$ , e  $\hat{e}_r \times (\hat{e}_z \times \hat{e}_r) = \hat{e}_z$ . Notem também uma coisa interessante:

$$\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) = -\hat{e}_z \neq (\hat{e}_r \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_z = 0.$$

O produto vetorial é não-associativo! Muitas vezes isso passa despercebido, dando origem a muiitos erros, infelizmente...☹

4. (2 Pontos)  $\nabla \cdot (\hat{e}_r \times \nabla \varphi) = 0$ , se  $\varphi = \varphi(x^2 + y^2, z)$ .

**Solução.** Verdadeira. Notem que  $\varphi(x^2 + y^2, z) = \varphi(r, z)$ , que implica em  $\nabla \varphi = \partial_r \varphi \hat{e}_r + \partial_z \varphi \hat{e}_z$ , de onde temos  $\hat{e}_r \times \nabla \varphi = -\partial_z \varphi \hat{e}_\phi$ , cujo divergente é nulo.

5. (2 Pontos)  $\nabla(\hat{e}_z \cdot \nabla \varphi) = 0$ , se  $\varphi = \varphi(x^2 + y^2, z)$ .

**Solução.** Falsa. Basta tomar  $\varphi = z^2$  e teremos  $\nabla(\hat{e}_z \cdot \nabla \varphi) = 2\hat{e}_z$