

Prova 2 – Métodos Matemáticos – MS550  
30 de junho de 2023

---

- Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima desta prova é 10.
- Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápis e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legíveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo. **Não entregue** seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.
- A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas, o mais rápido possível, no site do curso: <http://vigo.ime.unicamp.br/ms550>

Boa prova!



- 
1. (2.5 Pontos) Calcule, para  $\alpha > 1$ ,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-\alpha^x} dx$$

em termos da função  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  e discuta os limites  $\alpha \rightarrow \infty$  da integral e do integrando.

**Solução.** Este problema foi proposto no T4 como um exercício extra. Fazendo-se a substituição de variáveis  $t = \alpha^x = e^{x \log \alpha}$ ,  $dt = (\log \alpha) \alpha^x dx$ , a integral fica

$$I = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{\log \alpha}} e^{-t} \frac{dt}{t \log \alpha} = \frac{1}{\log \alpha} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{\log \alpha} - 1} dt = \frac{1}{\log \alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\log \alpha}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\log \alpha}\right).$$

É claro que

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-\alpha^x} dx = 1.$$

Sobre o integrando, notem que trata-se da função  $f(x) = e^x e^{-\alpha^x}$ . A função  $e^{-\alpha^x}$  para  $\alpha \rightarrow \infty$  comporta-se como uma função degrau. Temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha^x} = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ e^{-1}, & x = 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

o que reduz a integral a

$$I = \int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$

Isto encerra o problema.

Porém, é interessante notar que, neste caso, o resultado é mesmo calculando-se a integral e tomando-se o limite, ou fazendo-se ao contrário, primeiro tomando-se o limite e depois calculando-se a integral. Nem sempre é possível comutar a integração com o limite. Considerem, por exemplo, a seguinte função  $f(x, \alpha) = (\alpha + 1)x^\alpha$ . Notem que, por construção,

$$\int_0^1 f(x, \alpha) dx = 1.$$

Porém, temos  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(x, \alpha) = 0$  para  $0 \leq x < 1$ , e portanto não teríamos o mesmo resultado se trocássemos a ordem do limite e da integração, como no caso anterior. Veremos em Métodos II o que está por trás destes comportamentos estranhos. Vejam aqui o conceito fundamental envolvido nesses problemas.

2. Explore a função geratriz  $e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_k(z)$ , com  $z, t \in \mathbb{C}$ , e mostre que as funções de Bessel de primeira espécie  $J_k(z)$  satisfazem as seguintes identidades para  $x, y, \theta \in \mathbb{R}$ .

(a) (1 Ponto)  $e^{-x \sin \theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(ix) e^{ik\theta}$ .

**Solução.** Este é uma variante do exercício 33 do livro, a identidade de Jacobi-Anger. Considerando-se  $t = e^{i\theta}$  na função geratriz, temos  $e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} = e^{iz \sin \theta}$ . Tomando-se agora  $z = ix$ , temos a identidade desejada e isto encerra o problema.

Porém, não posso deixar de comentar que este é precisamente o problema discutido em sala sobre a série de Fourier da função  $f(\theta) = e^{\sin \theta}$ , que obviamente é suave e periódica e, portanto, seus coeficientes de Fourier devem decair mais rápido que qualquer potência. Os coeficientes (complexos) de Fourier neste caso serão

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin \theta} e^{-in\theta} d\theta = J_n(-i).$$

Para grandes  $n$ , o comportamento assintótico da função  $J_n(z)$  é

$$J_n(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^n,$$

vejam detalhes aqui, de onde vemos que os coeficientes decaem, de fato, mais rapidamente que qualquer exponencial(!).

(b) (1.5 Pontos)  $J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y)$ .

**Solução.** Este é o exercício 35 do capítulo 5 do livro texto. A solução é simples. Notem que da função geratriz temos

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})} e^{\frac{y}{2}(t-t^{-1})} = e^{\frac{x+y}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t^{k+\ell} J_k(x) J_{\ell}(y).$$

Fazendo-se  $k + \ell = m$ , as somas podem ser escrita como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t^{k+\ell} J_k(x) J_{\ell}(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{m-k}(y)}_{J_m(x+y)} = e^{\frac{x+y}{2}(t-t^{-1})}.$$

3. (2.5 Pontos) Os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie são definidos, respectivamente, como

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad \text{e} \quad U_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n+1)\theta.$$

Explorando a série de Taylor da função  $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| < 1$ , deduza as seguintes funções geratrizes para os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k T_k(x), \quad \frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k U_k(x),$$

$x, t \in \mathbb{R}$ , com  $0 < t < 1$ .

**Solução.** Este problema é essencialmente o mesmo que foi discutido em sala como um exemplo de uma série de Fourier de uma função suave e periódica. Seja  $z = te^{i\theta}$ , com  $0 < t < 1$ . Teremos

$$\frac{1}{1-te^{i\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k e^{ik\theta}.$$

Notem que

$$\frac{1}{1 - te^{i\theta}} = \frac{1 - te^{-i\theta}}{1 - 2t \cos \theta + t^2}.$$

Tomando-se a parte real, temos

$$\frac{1 - t \cos \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \cos k\theta,$$

ou em termos da variável  $\cos \theta = x$

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k T_k(x).$$

Por outro lado, tomando-se a parte imaginária, teremos

$$\frac{t \sin \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \sin k\theta,$$

ou em termos da variável  $\cos \theta = x$

$$\frac{1}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k U_k(x).$$

4. Considere o problema da corda vibrante simples  $\partial_x^2 u = \partial_t^2 u$ , com condições de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad (\sin \theta)u(L, t) + (\cos \theta)\partial_x u(L, t) = 0,$$

com  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , e com a separação de variáveis usual  $u(x, t) = v(x)T(t)$ , chamando-se a constante de separação de  $-\lambda$ .

- (a) (0.5 Ponto) O problema de Sturm-Liouville nos garante que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Do ponto de vista de evolução temporal, quais são as implicações de autovalores não positivos neste problema? Comente explicitamente os casos  $\lambda = 0$  e  $\lambda < 0$ .

**Solução.** Este problema é semelhante ao já discutido no T6. Após a separação de variáveis, a solução da parte temporal será  $T(t) = A \cos \sqrt{\lambda}t + B \sin \sqrt{\lambda}t$  para  $\lambda \neq 0$ , ou  $T(t) = At + b$  para o caso  $\lambda = 0$ . A existência de autovalores não positivos implicará na existência de soluções crescentes no tempo, em contraste com as soluções oscilatórias típicas do problema da corda vibrante com  $\lambda > 0$ .

- (b) (1 Ponto) Dado um  $\lambda$  real arbitrário, mostre que **sempre** é possível escolher um valor de  $\theta$  tal que  $\lambda$  esteja no espectro do problema de SL associado. Determine  $\theta$  como função de  $\lambda$ .

**Solução.** Começemos pelo caso  $\lambda > 0$ . Impondo-se a primeira condição de contorno para a equação  $v'' = -\lambda v$ , temos

$$v(x) = \sin \sqrt{\lambda}x.$$

A segunda condição de contorno corresponde a

$$(\sin \theta) \sin \sqrt{\lambda}L + \sqrt{\lambda}(\cos \theta) \cos \sqrt{\lambda}L = 0,$$

ou

$$\tan \theta = -\sqrt{\lambda} \cot \sqrt{\lambda}L,$$

que sempre tem solução para  $\lambda > 0$ .

O caso  $\lambda = 0$  é simples, pois a solução da equação  $v'' = 0$  que satisfaz a primeira condição de contorno é  $v(x) = x$ . A segunda condição de contorno é

$$L \sin \theta + \cos \theta = 0,$$

cuja solução é  $\tan \theta = -1/L$ . Notem que este resultado poderia ter sido obtido do limite  $\lambda \rightarrow 0$  do caso anterior.

Resta o caso  $\lambda < 0$ . A solução que satisfaz a primeira condição é

$$v(x) = \sinh \sqrt{-\lambda}x,$$

e a segunda condição será

$$(\sin \theta) \sinh \sqrt{-\lambda}L + \sqrt{-\lambda}(\cos \theta) \cosh \sqrt{-\lambda}L = 0,$$

cuja solução é

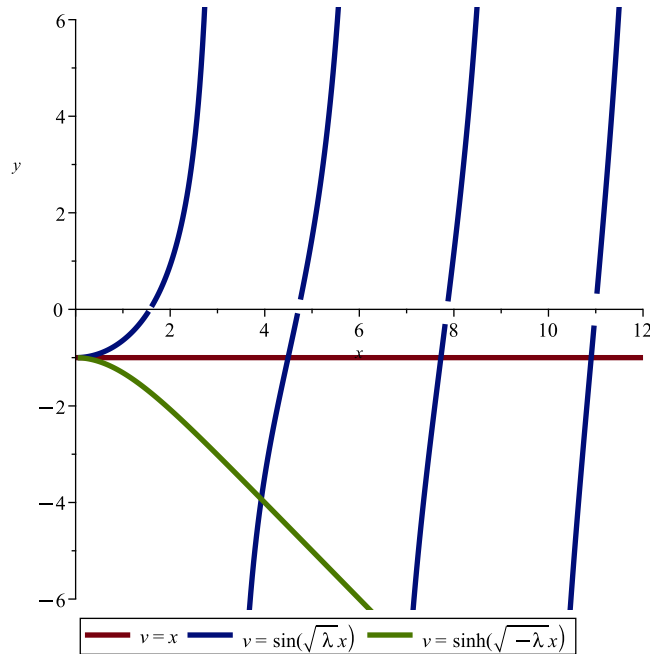
$$\tan \theta = -\sqrt{-\lambda} \coth \sqrt{-\lambda}L,$$

que tem solução para todo  $\lambda < 0$ . Assim, temos finalmente

$$L \tan \theta = \begin{cases} -\sqrt{\lambda}L \cot \sqrt{\lambda}L, & \text{para } \lambda > 0, \text{ com } v(x) = \sin \sqrt{\lambda}x, \\ -1, & \text{para } \lambda = 0, \text{ com } v(x) = x, \\ -\sqrt{-\lambda}L \coth \sqrt{-\lambda}L, & \text{para } \lambda < 0, \text{ com } v(x) = \sinh \sqrt{-\lambda}x, \end{cases}$$

o que encerra o problema, mas obviamente há mais coisas interessantes aqui.

A figura abaixo



mostra os gráficos das funções do parágrafo anterior e suas respectivas autofunções, para os 3 casos possíveis de  $\lambda$ . Notem que para  $L \tan \theta > -1$ , só temos autofunções oscilatórias,  $v = \sin \sqrt{\lambda}x$ . Por outro

lado, para  $L \tan \theta < -1$ , o estado fundamental (menor autovalor  $\lambda$ ) é sempre do tipo não-oscilatório,  $v = \sinh \sqrt{-\lambda}x$ , mas todos os outros são oscilatórios. Curiosamente, para  $L \tan \theta \approx -4$ , temos que existe um  $\lambda \neq 0$  tal que ambos  $\pm \lambda$  estão no espectro do problema! Finalmente, para  $L \tan \theta = -1$ , o estado fundamental é não oscilatório ( $v = x$ ), com  $\lambda = 0$ , mas todos os outros são oscilatórios.

(c) (1 Ponto) A função

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [(\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2] dx$$

pode ser interpretada como a energia associada às vibrações da corda. Calcule  $\dot{\mathcal{E}}(t)$  para as condições de contorno do problema. Quais condições são compatíveis com a conservação ( $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$ ) dessa quantidade? Discuta. (Dica: calcule a derivada  $\dot{\mathcal{E}}(t)$ , faça algumas integrações por partes e use a equação da corda.)

**Solução.** Notem que

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \int_0^L [(\partial_t u)(\partial_t^2 u) + (\partial_x u)(\partial_x^2 u)] dx.$$

Fazendo-se uma integração por partes no último termo, tem-se

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \int_0^L [(\partial_t^2 u) - (\partial_x^2 u)] (\partial_t u) dx + \partial_t u \partial_x u \Big|_0^L.$$

A equação da corda implica que o termo da integral é nulo. Além disso, a condição de contorno  $u(0, t) = 0$  garante que

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \partial_t u(L, t) \partial_x u(L, t) = -(\tan \theta) u(L, t) \partial_t u(L, t) = -\frac{\tan \theta}{2} \partial_t (u(L, t)^2)$$

para  $\cos \theta \neq 0$ . Para  $\cos \theta = 0$ , temos  $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$ . Assim, vemos que a quantidade  $\mathcal{E}(t)$  é sempre conservada se  $\theta = 0$  (condição de Neumann  $\partial_x u(L, t) = 0$ ) ou se  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (condição de Dirichlet  $u(L, t) = 0$ ), para qualquer condição inicial. Nestes casos, é razoável considerar o sistema como “isolado”, no sentido que não há energia fluindo para dentro do sistema e, portanto,  $\mathcal{E}(t)$  é conservada. Esta resposta é suficiente para garantir a pontuação máxima.

Há, porém, uma outra situação em que  $\mathcal{E}(t)$  é conservada, mas não de maneira geral. É o caso com  $\lambda = 0$  como autovalor fundamental, i.e., o caso com condição de contorno  $L \tan \theta = -1$ . Se as condições iniciais  $u(x, 0)$  e  $\partial_t u(x, 0)$  neste caso forem tais que apenas o modo fundamental é excitado, e de tal maneira que a solução seja  $u(x, t) = Ax$ , sem dependência temporal, o termo da condição de contorno também se anula. Porém, ao contrário das condições de Dirichlet e de Neumann, para as quais  $\mathcal{E}(t)$  é sempre conservada para qualquer condição inicial, neste caso apenas a solução  $u(x, t) = Ax$  tem energia  $\mathcal{E}(t)$  conservada. Trata-se de uma situação curiosa, pois há energia potencial no sistema, mas não há movimento. A interpretação “física” das condições de contorno nem sempre é fácil, muitas vezes envolvem sutilezas. Como já disse, o Jefferson tem muito a contar sobre isso, conversem com ele.

5. (2.5 Pontos) Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $v_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , as autofunções normalizadas (reais) de um problema de Sturm-Liouville regular (PSLR) no intervalo  $[a, b]$ . Mostre que  $\varepsilon_n = \|f - f_n\| \geq 0$  é uma sequência não-crescente, sendo  $\|\cdot\|$  a norma associada ao produto interno natural  $(\cdot, \cdot)$  do PSLR,  $f_n = \sum_{k=0}^n a_k v_k$  e  $a_k = (f, v_k)$ .

**Solução.** Este problema é a generalização da desigualdade de Bessel que discutimos em aula. Notem que

$$\varepsilon_n^2 = (f - f_n, f - f_n) = \|f\|^2 - 2(f, f - f_n) + (f_n, f_n).$$

Porém, sabemos que

$$(f, f - f_n) = \left( f, \sum_{k=0}^n a_k v_k \right) = \sum_{k=0}^n a_k (f, v_k) = \sum_{k=0}^n a_k^2$$

e

$$(f_n, f_n) = \left( \sum_{k=0}^n a_k v_k, \sum_{\ell=0}^n a_\ell v_\ell \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n (f_k, f_\ell) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k a_\ell (v_k, v_\ell) = \sum_{k=0}^n a_k^2,$$

onde usamos a ortonormalidade das autofunções  $v_k$ . Temos finalmente

$$\varepsilon_n^2 = (f - f_n, f - f_n) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2,$$

de onde segue que  $\varepsilon_m \leq \varepsilon_n$  se  $m \geq n$ , i.e., a sequência é não crescente. Como teremos oportunidade de discutir em Métodos II, essa sequência é mais do que simplesmente não-crescente, ela efetivamente converge pra zero, i.e., as autofunções de um PSLR sempre podem ser vistas como uma base no espaço de funções bem comportadas, no mesmo espírito da série de Fourier.