

Prova 1 – Métodos Matemáticos – MS550
5 de maio de 2023

- Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima desta prova é 10. Há um formulário que pode ser útil no verso.
- Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápis e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legíveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo. **Não entregue** seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.
- A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas, o mais rápido possível, no site do curso: <http://vigo.ime.unicamp.br/ms550>

Boa prova!



1. As afirmações abaixo dizem respeito a campos vetoriais em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) da forma $\vec{V} = v(\rho, z)\hat{e}_\theta$, sendo $v(\rho, z)$ uma função suave. Prove as afirmações verdadeiras e de um contra-exemplo para as falsas.

(a) (0.5 Ponto) O campo \vec{V} é solenoidal, *i.e.*, existe sempre um campo vetorial \vec{A} (o “potencial vetor”) tal que $\vec{V} = \nabla \times \vec{A}$.

Solução. Afirmação verdadeira. Como $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, \vec{V} é solenoidal. Notem que seu potencial vetor pode ser do tipo $\vec{A} = a_\rho(\rho, z)\hat{e}_\rho + a_z(\rho, z)\hat{e}_z$, com

$$\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} = v(\rho, z).$$

Ocorre que esta equação tem infinitas soluções. Podemos, por exemplo, escolher um a_z arbitrário que não dependa de ρ , $a_z = a_z(z)$, e

$$a_\rho = f(\rho, z) + g(\rho),$$

sendo $f(\rho, z)$ a primitiva de $v(\rho, z)$ em relação a z e $g(\rho)$ uma função arbitrária. De maneira ainda mais interessante, se dois potenciais vetores \vec{A}_1 e \vec{A}_2 derem origem a um mesmo \vec{V} , *i.e.*, $\vec{V} = \nabla \times \vec{A}_1 = \nabla \times \vec{A}_2$, então $\nabla \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0$, *i.e.*, os dois potenciais vetores irão diferir por um gradiente! Esta ambiguidade na definição dos potenciais vetores é a base de um dos conceitos mais frutíferos da Física Moderna, a chamada invariância de gauge.

(b) (0.5 Ponto) O campo \vec{V} é conservativo, *i.e.*, existe sempre uma função ϕ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$.

Solução. Afirmação falsa. Contra-exemplo: $\vec{V} = \hat{e}_\theta$, para o qual $\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{\rho}\hat{e}_z$.

(c) (0.5 Ponto) O campo $\vec{V} \times \hat{e}_z$ é conservativo.

Solução. Afirmação falsa. Notem que $\vec{V} \times \hat{e}_z = v(\rho, z)\hat{e}_\rho$. Contra-exemplo: $v(\rho, z) = z$, e teremos $\nabla \times (\vec{V} \times \hat{e}_z) = \hat{e}_\theta$.

(d) (0.5 Ponto) O campo $\vec{V} \times \hat{e}_z$ é solenoidal.

Solução. Afirmação falsa. Contra-exemplo: $v(\rho, z) = 1$, e teremos $\nabla \cdot (\vec{V} \times \hat{e}_z) = 1/\rho$.

(e) (0.5 Ponto) O campo $\vec{V} \times \hat{e}_\rho$ é solenoidal.

Solução. *Afirmção falsa. Contra-exemplo: $v(\rho, z) = z$, e teremos $\nabla \cdot (\vec{V} \times \hat{e}_\rho) = \nabla \cdot (-z\hat{e}_z) = -1$.*

2. Nos itens abaixo, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função complexa suave com $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(a) (0.5 Ponto) Mostre que se $f(z)$ é analítica, as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = (\nabla u) \cdot (\nabla v) = 0,$$

i.e., $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são soluções da equação de Laplace com curvas de nível (equipotenciais) perpendiculares.

Solução. *Se $f(z)$ é uma função analítica, suas componentes reais e imaginárias $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann: $\partial_x u = \partial_y v$, e $\partial_y u = -\partial_x v$. Derivando-se a primeira em relação a x e a segunda em relação a y e comparando-se os resultados, deduz-se que $\nabla^2 u = 0$. De maneira semelhante, derivando-se a primeira em relação a y e a segunda em relação a x , conclui-se que $\nabla^2 v = 0$. Finalmente, notem que $(\nabla u) \cdot (\nabla v) = \partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v$, que se anula como consequência das condições de Cauchy-Riemann.*

(b) Considere a função $f(z)$ definida como $f(z) + e^{f(z)} = z$, *i.e.*, a função inversa de $z + e^z$.

i. (1 Ponto) Prove que esta função é analítica, a menos de possíveis pontos e cortes de ramificação.

Solução. *Estamos olhando apenas para condições locais, i.e., para a vizinhança de um ponto $z \in \mathbb{C}$. Vamos ignorar aspectos globais, de como, por exemplo, o plano complexo \mathbb{C} é mapeado por essa função, seus pontos de ramificação etc etc. Há várias possíveis soluções para esta questão, talvez a mais simples e direta seja mostrar que as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas na vizinhança de um ponto $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) + e^{f(z)} = z$. Escrevendo-se esta expressão em termos de suas partes reais e imaginárias, teremos*

$$u + iv + e^{u+iv} = x + iy.$$

Derivando-se em relação a x e a y teremos, respectivamente,

$$\partial_x u + i\partial_x v + e^{u+iv} (\partial_x u + i\partial_x v) = 1, \quad \partial_y u + i\partial_y v + e^{u+iv} (\partial_y u + i\partial_y v) = i.$$

Estas equações implicam, respectivamente

$$\partial_x u + i\partial_x v = \frac{1}{1 + e^{u+iv}} = \partial_y v - i\partial_y u,$$

as quais implicam, por sua vez, as condições de Cauchy-Riemann, a menos dos pontos (de ramificação) em que o denominador da fração eventualmente possa se anular.

Uma solução equivalente é mostrar que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$, sendo \bar{z} o complexo-conjugado de z . Por trás desta condição está o seguinte. Notem que

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

de onde tem-se

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}.$$

Notem agora que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

de onde vemos que as condições de Cauchy-Riemann são equivalentes a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$. Derivando-se a definição da função $f(z)$ temos

$$(1 + e^f) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0,$$

que mostra que $f(z)$ é analítica, a menos dos pontos tais que $e^{f(z)} = -1$, que serão pontos de ramificação da função, como na solução anterior.

Outra possível solução seria explorar a construção semelhante ao teorema da função inversa real, no qual se relaciona a derivada de uma função inversa f^{-1} com $1/f'$, i.e., o recíproco da derivada da função f . Deem uma olhada no teorema de inversão de Lagrange para mais detalhes. Obviamente, qualquer solução correta será aceita.

- ii. (0.5 Ponto) Escreva as expressões implícitas que definem $u(x, y)$ e $v(x, y)$ neste caso, i.e., escreva as expressões que definem $x(u, v)$ e $y(u, v)$.

Solução. Continuando o item anterior, temos $u + iv + e^u (\cos v + i \sin v) = x + iy$, de onde temos finalmente

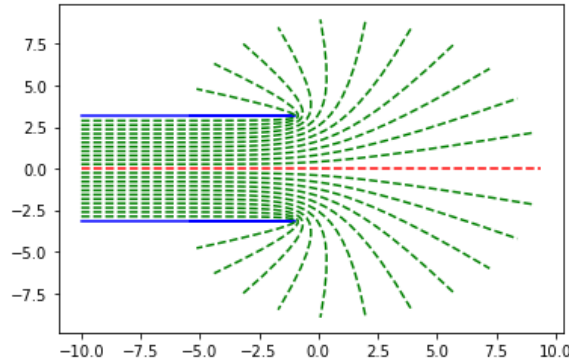
$$x = u + e^u \cos v, \quad y = v + e^u \sin v.$$

- iii. (0.5 Ponto) Apesar de não termos a expressão explícita das funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ do item anterior, sabemos que ambas são soluções da equação de Laplace. Em particular, as curvas de nível (equipotenciais) correspondentes a $v(x, y) = A$ constante são as curvas $x(u, A)$ e $y(u, A)$, considerando-se agora u um parâmetro livre $u \in \mathbb{R}$. Esboce estas curvas para $-\pi \leq A \leq \pi$, com destaque às equipotenciais correspondentes a $A = \pm\pi$ e $A = 0$.

Solução. Deve-se esboçar as curvas $x(u) = u + e^u \cos A$, $y(u) = A + e^u \sin A$, $u \in \mathbb{R}$, para alguns valores de A , sendo obrigatório os casos $A = \pm\pi$ e $A = 0$. **Por construção**, estas curvas são as equipotenciais (linhas de nível) $v(x, y) = A$. Começemos com o caso $A = 0$. A curva aqui será $x(u) = u + e^u$, $y = 0$. Trata-se, obviamente, do eixo x , pois teremos $y = 0$ para a toda curva, e com $u \in \mathbb{R}$, $x(u)$ varre (monotonicamente) todo o eixo x . Passemos agora ao caso $A = \pi$. Neste caso, a curva será $x(u) = u - e^u$, $y = \pi$. Esta curva é uma semirreta! Todos seus pontos têm coordenada $y = \pi$, mas a imagem de $x(u)$ não é toda a reta real, mas apenas os pontos $(-\infty, -1]$, como pode-se inferir de uma análise simples da função $x(u) = u - e^u$. O caso correspondente a $v = -A$ é idêntico, porém agora a semirreta tem $y = -\pi$. Para ser considerado correto, seu esboço deve inequivocamente descrever estas propriedades destes três casos.

Para os outros valores de A , notem que há uma simetria no problema. Se conhecermos a curva para $0 < A \leq \pi$, podemos obter facilmente a curva correspondente ao caso $-A$, basta tomar $-y(u)$. Assim, basta olharmos para os casos com $A > 0$. Para qualquer A tal que $0 < A < \pi$, temos que $\sin A > 0$ e, portanto, $y(u)$ será uma função exponencial crescente, portanto a equipotencial se afasta do eixo x .

Para a curva $x(u)$, há dois comportamentos diferentes. Para $0 < A \leq \frac{\pi}{2}$, a função $x(u)$ é crescente, e portanto a equipotencial caminha na direção de x positivo. Porém, para $\frac{\pi}{2} < A \leq \pi$, a função $x(u)$ tem um máximo. A curva começa se movendo na direção de x positivo, mas termina na direção contrária. Obviamente, não era necessário esboçar com exatidão estas curvas. Vejam a seguir seus gráficos.



As curvas azuis sólidas são os casos $A = \pm\pi$. A curva tracejada em vermelho é a equipotencial $A = 0$. A configuração é simétrica por reflexão em torno dessa equipotencial. As outras equipotenciais correspondem aos casos $A = \pm \frac{n\pi}{12}$, com $0 < n < 12$. Para todas as curvas, $u \in [-10, 2]$. O código em python para gerar esta figura está aqui. É sugestiva esta figura, não? Vejam a questão extra...

3. (2.5 pontos) Sabe-se que, para um certo valor de α , a equação diferencial linear de segunda ordem

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

admite como uma de suas soluções o polinômio de Chebyshev $T_1(x) = x$. Determine, **de forma fechada**, a outra solução linearmente independente.

Solução. Do Teste 3, sabemos que $\alpha = 1$. Há diversas maneiras de se obter a segunda solução dessa equação. Vamos chamar a solução que procuramos de $S_1(x)$. Por exemplo, podemos também inspirados no Teste 3, que por sua vez era inspirado no problema 8 do capítulo 3, fazer a mudança de variável $x = \cos \theta$, a qual transforma a equação em

$$\ddot{y} + y = 0,$$

cuja solução é $y = A \cos \theta + B \sin \theta$. Já sabemos que a solução em cosseno corresponde ao polinômio T_1 . Assim, a solução que procuramos é a que corresponde ao seno. Teremos $S_1 = B \sin \theta$, sendo B uma constante arbitrária. Em termos da variável original $x = \cos \theta$, teremos $S_1(\cos \theta) = B\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ de onde temos finalmente $S_1(x) = B\sqrt{1 - x^2}$.

Outra possível maneira de se obter a solução é explorando-se a redução de ordem da equação. Vamos procurar soluções do tipo $S_1(x) = u(x)T_1(x)$. Substituindo-se na equação, teremos

$$(x - x^3)u'' + (2 - 3x^2)u' = 0,$$

que, com a ajuda da expansão em frações parciais do formulário, pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx} \log u' = \frac{3x^2 - 2}{x - x^3} = \frac{3x^2 - 2}{x(1-x)(1+x)} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}\right),$$

que pode ser imediatamente integrada como

$$-\log u' = 2 \log |x| + \frac{\log |x-1|}{2} + \frac{\log |x+1|}{2} + C = \log \left(e^C x^2 \sqrt{1-x^2} \right),$$

o que nos dá finalmente, também com ajuda do formulário,

$$u(x) = D \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + E,$$

sendo $D = e^{-C}$ e E uma outra constante arbitrária. Daqui, segue nosso resultado: $S_1(x) = D\sqrt{1-x^2}$.

Talvez a **pior** maneira possível de se obter S_1 seja somando-se a série obtida pelo método de Frobenius. Do Teste 3, vemos que T_1 surge da série ímpar. Porém, há também a série par, que necessariamente será S_1

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k},$$

com

$$a_{k+1} = \left(\frac{2k-1}{2k+2} \right) a_k = \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{k+1} \right) a_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

É fácil ver que o termo geral dessa relação de recorrência será

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k - \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Comparando-se com a série de Taylor do formulário, conclui-se que

$$S_1 = a_0 \sqrt{1-x^2}.$$

Note que, sem conhecer a série de Taylor do formulário, você dificilmente iria conseguir concluir isso.

4. Dado um operador diferencial linear de segunda ordem $L[y] = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y$, seu operador adjunto é definido como $L^\dagger[y] = (p(x)y)'' - (q(x)y)' + r(x)y$, para funções suficientemente diferenciáveis.

- (a) (1 Ponto) Mostre que um operador da forma $L[y] = (p(x)y')' + r(x)y$ é auto-adjunto, i.e., $L[y] = L^\dagger[y]$.

Solução. Este é o exemplo resolvido 3.4 do livro.

- (b) (1.5 Ponto) Escreva a equação da questão 3 em sua forma auto-adjunta.

Solução. Do exemplo resolvido 3.4 do livro, um operador $L[y]$ não auto-adjunto pode ser transformado num auto-adjunto multiplicando-o por uma função $h(x)$ tal que $(hp)' = hq$. Para o caso de equação de Chebyshev, h deve satisfazer

$$\frac{h'}{h} = \frac{x}{1-x^2},$$

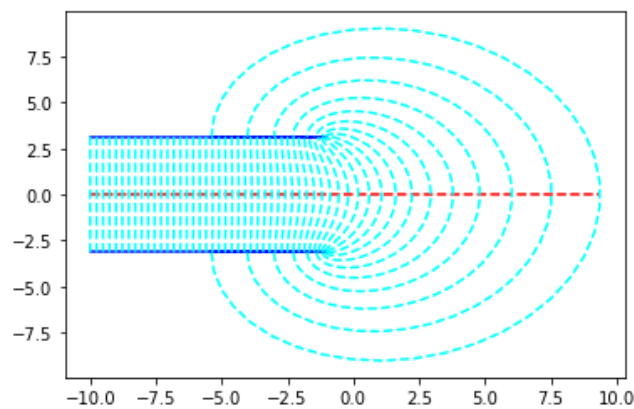
de onde tem-se, com ajuda da expansão em frações parciais do formulário, $h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. A forma auto-adjunta da equação de Chebyshev é portanto

$$\left(\sqrt{1-x^2} y' \right)' + \frac{\alpha^2 y(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

5. (2.5 Pontos) Interprete o problema do item (b)iii da questão 2 como um problema de eletrostática, *i.e.*, como um problema de valor de contorno da equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ em \mathbb{R}^3 . O que podemos afirmar sobre as linhas de campo (curvas ortogonais às superfícies equipotenciais ϕ constante) nesse caso?

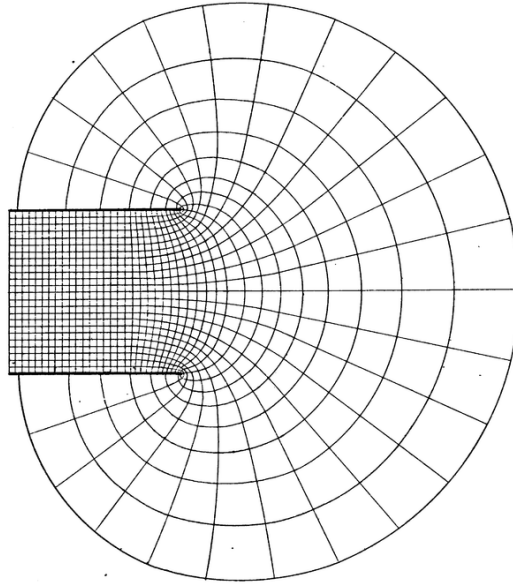
Solução. O campo elétrico $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\phi(x, y, z) = v(x, y)$ não depende de z , obviamente. Portanto, as curvas de nível determinadas no problema 2 são as seções (todas idênticas) das superfícies equipotenciais ϕ constante perpendiculares ao eixo z , que é o eixo que “sai” das figuras. O problema eletrostático equivalente é o de duas placas condutoras paralelas, mantidas a potenciais $-\pi$ e π , com uma distância entre elas de 2π . É um problema de capacitor. O interessante é que essas placas são semiplanos, e a configuração corresponde aos “efeitos de borda” do capacitor. Notem que longe da borda, para $x \rightarrow -\infty$, as equipotenciais são como as do capacitor de placas infinitas, paralelas às placas do capacitor. Porém, na borda, as equipotenciais são bem diferentes.

As linhas de campo são, por construção, perpendiculares às equipotenciais. Do item (a) da questão 2, temos que as curvas u constante, por construção, são perpendiculares às equipotenciais de v ! Portanto, as nossas linhas de campo são as curvas $x(u, A)$ e $y(u, A)$ com u constante e considerando-se A um parâmetro livre no intervalo $[-\pi, \pi]$. A figura a seguir mostra as linhas de campos do problema.



As curvas azuis sólidas são as placas do capacitor, mantidas a potenciais $\phi = \pm\pi$. A curva tracejada em vermelho é a equipotencial $\phi = 0$. A configuração é simétrica, a menos do sentido do campo elétrico, por reflexão em torno dessa equipotencial. Notem que longe da borda, para $x \rightarrow -\infty$, as linhas de campo são como no caso das placas infinitas, verticais, e concentradas no interior das placas. Perto da borda, porém, as linhas de campo “vazam” para fora do capacitor. O código em python para gerar esta figura está aqui.

É instrutivo sobrepormos os dois gráficos, das equipotenciais e das linhas de campo. Isso já foi feito, exatamente 150 anos atrás. É o Exemplo 7 de aplicação de variáveis complexas do capítulo 12 da obra fundamental *A Treatise on Electricity and Magnetism*, de James Clerk Maxwell. Este exercício foi proposto como uma homenagem à Maxwell. Agradeça os pontos extras a ele, não a mim. © Vai, a seguir, a ilustração original de Maxwell, que é a superposição dos dois gráficos anteriores. Seu tratado pode ser lido integralmente, de maneira perfeitamente legal, aqui.



Lines of Force between two Plates.

FORMULÁRIO EVENTUALMENTE ÚTIL

- Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , os operadores gradiente, divergente e rotacional são dados por

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z, \quad \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\theta) - \frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right)\hat{e}_z,$$

para $\vec{V} = v_\rho\hat{e}_\rho + v_\theta\hat{e}_\theta + v_z\hat{e}_z$. Os versores são usualmente orientados como $\hat{e}_\rho = \hat{e}_\theta \times \hat{e}_z$.

- Uma decomposição em frações parciais que pode ser útil: $\frac{Ax^2+B}{x^3-x} = \frac{A+B}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) - \frac{B}{x}$.
- Uma derivada eventualmente útil: $\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
- Uma certa série de Taylor que pode ser útil:

$$\sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k - \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$