Exame Final – Métodos Matemáticos – MS550
10 de julho de 2023

- *Esta prova tem 5 questões, cada uma valendo 2.5 pontos. A nota máxima é 10. Há um formulário que pode ser útil no verso.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar. A prova pode ser feita a lápis e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legíveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.* **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas, o mais rápido possível, no site do curso:* `http://vigo.ime.unicamp.br/ms550`

Boa prova!

---

1. As afirmações abaixo dizem respeito a funções suaves $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ em coordenadas cartesianas (x, y, z) e cilíndricas (r, ϕ, z). Prove as verdadeiras e de um contra-exemplo para as falsas.

   (a) (0.5 Ponto) $\hat{e}_\phi \cdot (\hat{e}_r \times \nabla\varphi) = 0$ para qualquer φ suave.

   Solução. *Questão idêntica ao T1. Falsa. Basta tomar $\varphi = z$, e teremos $\nabla\varphi = \hat{e}_z$, com $\hat{e}_\phi \cdot (\hat{e}_r \times \nabla\varphi) = -1$.*

   (b) (0.5 Ponto) $\hat{e}_r \times (\hat{e}_z \times \nabla\varphi) = 0$, para qualquer φ suave.

   Solução. *Questão idêntica ao T1. Falsa. Basta tomar $\varphi = r$, e teremos $\nabla\varphi = \hat{e}_r$, e $\hat{e}_r \times (\hat{e}_z \times \hat{e}_r) = \hat{e}_z$. Notem também uma coisa interessante:*

   $$\hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) = -\hat{e}_z \neq (\hat{e}_r \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_z = 0.$$

   O produto vetorial é não-associativo! Muitas vezes isso passa desapercebido, dando origem a muiiitos erros, infelizmente...☹

   (c) (0.5 Ponto) $\nabla \cdot (\hat{e}_r \times \nabla\varphi) = 0$, se $\varphi = \varphi(x^2 + y^2, z)$.

   Solução. *Questão idêntica ao T1. Verdadeira. Notem que $\varphi(x^2 + y^2, z) = \varphi(r, z)$, que implica em $\nabla\varphi = \partial_r\varphi\hat{e}_r + \partial_z\varphi\hat{e}_z$, de onde temos $\hat{e}_r \times \nabla\varphi = -\partial_z\varphi\hat{e}_\phi$, cujo divergente é nulo.*

   (d) (0.5 Ponto) $\nabla(\hat{e}_z \cdot \nabla\varphi) = 0$, se $\varphi = \varphi(x^2 + y^2, z)$.

   Solução. *Questão idêntica ao T1. Falsa. Basta tomar $\varphi = z^2$ e teremos $\nabla(\hat{e}_z \cdot \nabla\varphi) = 2\hat{e}_z$*

   (e) (0.5 Ponto) $\hat{e}_\phi \cdot \nabla\varphi = 0$, se $\varphi = \varphi(x^2 + 2y^2)$.

   Solução. *Esta questão é uma variação do T1. Esta afirmação é falsa. O contra-exemplo mais simples é $\varphi = x^2 + 2y^2 = r^2 + r^2 \sin^2\phi$, que implica em $\hat{e}_\phi \cdot \nabla\varphi = 2r \sin\phi \cos\phi$.*

2. (2.5 Pontos) A função $\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$, tem polos simples nos inteiros negativos. Determine o resíduo desses polos.

Solução. *Este é o exercício 4 do Capítulo 5 do livro. Pode ser resolvido usando-se a representação de Gauss que está no formulário, como sugere o livro, ou, talvez de maneira mais simples, como segue abaixo.*

Como são polos simples, basta calcular

$$\operatorname*{Res}_{z=-n}\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z).$$

Das propriedades elementares da função $\Gamma(z)$, sabemos que

$$\Gamma(z+n+1) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)\Gamma(z),$$

de onde temos

$$\operatorname*{Res}_{z=-n}\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{(z+n)\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = \frac{\Gamma(1)}{-n(1-n)(2-n)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

3. (2.5 Pontos) Use o método de Frobenius e obtenha a solução geral da equação

$$2x^2y'' + (1-2x)y = 0.$$

como séries em torno da origem. Encontre o termo geral das relações de recorrência.

Solução. *Com $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}$, temos*

$$2\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_kx^{k+\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\lambda} - 2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\lambda+1} = 0,$$

ou

$$x^{\lambda}\left[(2\lambda(\lambda-1)+1)a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(2(k+\lambda)(k+\lambda-1)+1)\,a_k - 2a_{k-1}\right]x^k\right].$$

A equação indicial é $2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, cuja solução é $\lambda = (1\pm i)/2$. A relação de recorrência é

$$a_k = \frac{2a_{k-1}}{2(k+\lambda)(k+\lambda-1)+1}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Comecemos pela raiz $r_1 = (1+i)/2$. A relação de recorrência se simplifica como

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{k(k+i)}, \quad k = 1,2,3,\ldots,$$

cuja solução é

$$a_k = \frac{a_0}{k!(1+i)_k}.$$

Para a segunda raiz $r_2 = (1-i)/2$, tem-se a relação se decorrência

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{k(k-i)}, \quad k = 1,2,3,\ldots,$$

cuja solução é

$$a_k = \frac{a_0}{k!(1-i)_k}.$$

As duas raízes dão origem a duas soluções LI. Assim, a solução geral é a combinação linear das duas soluções

$$y_{\pm}(x) = x^{\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!(1\pm i)_k}.$$

Não é necessário simplificar esta expressão além deste ponto. Porém, há como melhorá-la.

Notem que

$$y_\pm(x) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k\pm\frac{i}{2}}}{k!(1\pm i)_k} = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2k\pm i}}{k!(1\pm i)_k} = 2^{\mp i}\sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\sqrt{x})^{2k\pm i}}{2^{2k}k!(1\pm i)_k} = (2i)^{\mp i}\sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2i\sqrt{x})^{2k\pm i}}{2^{2k}k!(1\pm i)_k}.$$

Comparando-se com a série de função de Bessel $J_\nu(z)$ do formulário, temos que a solução geral será

$$y(x) = A\sqrt{x}J_i\left(2i\sqrt{x}\right) + B\sqrt{x}J_{-i}\left(2i\sqrt{x}\right),$$

com A e B constantes arbitrárias.

4. (2.5 Pontos) Mostre que as funções de Bessel de primeira espécie $J_k(z)$ satisfazem as seguintes identidades:

   (a) $\cos x = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x)$,

   (b) $\sin x = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(x)$.

Solução. *Este é o exercício 34 do capítulo 5 do livro. Substituindo-se $t = i$ na função geratriz do formulário, ficamos com*

$$e^{\frac{x}{2}\left(i-i^{-1}\right)} = e^{ix} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(x),$$

de onde temos

$$\cos x + i\sin x = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(i^k J_k(x) + i^{-k}J_{-k}(x)\right).$$

Do formulário, temos $J_{-k} = (-1)^k J_k$ para k inteiro. Lembrando que $i^{2n} = (-1)^n$ para qualquer inteiro n, teremos para k par ($k = 2n$)

$$i^{2n}J_{2n} + i^{-2n}J_{-2n} = 2(-1)^n J_{2n}.$$

Por outro lado, para k impar ($k = 2n+1$) teremos

$$i^{2n+1}J_{2n+1} + i^{-(2n+1)}J_{-(2n+1)} = 2i(-1)^n J_{2n+1},$$

de onde seguem as duas identidades.

5. (2.5 Pontos) Considere o problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)\right)y_n = \lambda_n\rho(x)y_n, \\ y_n(-1) = y_n(1) = 0, \end{cases}$$

com $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mostre que se as funções $p(x)$, $q(x)$ e $\rho(x)$ forem todas pares, as autofunções y_n terão paridade definida por $y_n(x) = (-1)^n y_n(-x)$.

Solução. *Considere a mudança de variável $x \to -x$. A equação diferencial do PSLR fica*

$$\left(\frac{d}{dx}\left(p(-x)\frac{d}{dx}\right) - q(-x)\right)y_n(-x) = \lambda_n\rho(-x)y_n(-x).$$

Usando-se a paridade das funções $p(x)$, $q(x)$ e $\rho(x)$ ficamos com

$$\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)\right)y_n(-x) = \lambda_n\rho(x)y_n(-x).$$

Notem que as condições de contorno do problema são simétricas, o que significa que se as impusermos em $y_n(x)$, elas também serão verificadas para $y_n(-x)$. Portanto, acabamos de concluir que, se $y_n(x)$ é uma autofunção do PSLR com autovalor λ_n, $y_n(-x)$ também será uma autofunção com o mesmo autovalor. Porém, por se tratar de um PSLR, duas autofunções com um mesmo autovalor são necessariamente LD. Supondo que as autofunções são normalizadas, temos duas possibilidades, $y_n(x) = \pm y_n(-x)$, i.e., *as autofunções têm paridade definida: ou são pares, ou são ímpares. Para determinarmos exatamente a paridade da autofunção y_n, devemos considerar os "nós",* i.e., *os pontos no intervalo $(-1, 1)$ nos quais a autofunção y_n se anula. Como se trata de um PSLR, sabemos que y_n tem exatamente n nós no intervalo $(-1, 1)$ Se y_n for uma função ímpar, sabemos que $y_n(0) = 0$. Por outro lado, se n é par, temos $y_n'(0) = 0$ e $y_n(0) \neq 0$ (pois $y_n(0) = y_n'(0) = 0$ implicaria $y_n(x) = 0$ para todo $x \in [-1, 1]$). Assim, concluímos que $y_n(x) = (-1)^n y_n(-x)$.*

Formulário eventualmente útil

- *Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z), os operadores gradiente, divergente e rotacional são dados por*

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z, \quad \nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_z,$$

para $\vec{V} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_z\hat{e}_z$. Os versores são usualmente orientados como $\hat{e}_r = \hat{e}_\theta \times \hat{e}_z$.

- *A função $\Gamma(z)$ pode ser representada como:*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \Re(z) > 0, \quad \text{(Euler)},$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad \text{(Gauss)},$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}, \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad \text{(Weierstrass)},$$

sendo γ a constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).$$

- *As funções de Bessel de primeira espécie $J_k(z)$ têm a seguinte representação em série*

$$J_\nu(z) = a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k}k!(\nu+1)_k},$$

com $a_0^{-1} = 2^\nu\Gamma(\nu+1)$ e $\nu, z \in \mathbb{C}$, sendo $(\cdot)_k$ o símbolo de Pochhammer usual

$$(z)_k = \overbrace{z(z+1)\cdots(z+k-1)}^{k \text{ termos}}.$$

As funções $J_k(z)$ podem também ser definidas a partir da função geratriz

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-t^{-1}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}t^k J_k(z).$$

Além disso, temos sempre $J_{-k}(z) = (-1)^k J_k(z)$ para k inteiro.