Nome: ________________________________ RA: ____________________

TESTE 6 - F520/MS550 - Métodos Matemáticos I, 14 de junho de 2017.

Para as questões abaixo, considere o seguinte problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\lambda}{x}y, \quad 1 \le x \le e, \\ \\ y(1) = y'(e) = 0. \end{cases}$$

1. (3 Pontos) Encontre todas suas autofunções e autovalores.

**Solução.** *Notem que se trata da equação de Euler*

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

*cujas soluções são do tipo $y = Cx^{\varpi}$, com*

$$\varpi(\varpi - 1) + \varpi + \lambda = 0,$$

*cuja solução é $\lambda = -\varpi^2$ e, portanto, $y = C_+x^{\varpi} + C_-x^{-\varpi}$. Como sabemos, a imposição das condições de contorno $y(1) = y'(e) = 0$ levam a $y = 0$ para qualquer $\varpi$ real. Para o caso imaginário, temos $\varpi = i\mu$, $\lambda = \mu^2$, e*

$$y = B_\mu \sin \mu \ln x + C_\mu \cos \mu \ln x.$$

*A condição $y(1) = 0$ implica $C_\mu = 0$. Já a condição $y'(e) = 0$ implicará em*

$$y'(e) = \frac{\mu B_\mu}{e} \cos \mu = 0,$$

*de onde temos $\mu = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Assim, os autovalores e as autofunções deste problema de SL são*

$$\left( \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \pi^2, \sin \frac{2n+1}{2}\pi \ln x \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

2. (3 Pontos) Expanda a função $f(x) = 1$ em termos das autofunções deste problema.

**Solução.** *Seja $f_n = \sin \frac{2n+1}{2}\pi \ln x$ , $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Do problema de SL, sabemos que*

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_1^e f_n f_m \frac{dx}{x} = 0$$

*se $n \neq m$. Assim, podemos escrever a função $f(x) = 1$ como*

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 1, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k.$$

*Notem que*

$$\langle 1, f_k \rangle = \int_1^e \sin \frac{2n+1}{2}\pi \ln x \frac{dx}{x} = \int_0^1 \sin \frac{2n+1}{2}\pi w dw = \left[ -\frac{2}{(2n+1)\pi} \cos \frac{2n+1}{2}\pi w \right]_0^1 = \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

*onde fizemos a mudança de variáveis $x = e^w$. De maneira semelhante, teremos*

$$\langle f_k, f_k \rangle = \int_0^1 \sin^2 \frac{2n+1}{2}\pi w dw = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \cos(2n+1)\pi w)\, dw = \frac{1}{2}\left[w - \frac{1}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi w\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

*e ficamos com a expansão*

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{2n+1}{2}\pi \ln x.$$

3. (2 Pontos) Discuta o que ocorre com a expansão do item anterior nos extremos do intervalo $1 \leq x \leq e$.

   **Solução.** *Todos as autofunções $f_k(x)$ satisfazem a condição de contorno $f_k(1) = 0$. Portanto, para $x = 1$ a convergência não é pontual. Por outro lado, para $x = e$ a condição de contorno é compatível com a função $f(x) = 1$ que está sendo expandida. Temos que para todo $1 < x \leq e$ a convergência é ponto-a-ponto. (Compare com o caso das condições de contorno $f(1) = f(e^2) = 0$.)*

4. (4 Pontos) Calcule

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$$

e

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \cdots$$

(Dica: Explore a expansão do item 2.)

**Solução.** *Para a primeira série, tomemos a expansão para $x = e$, cuja convergência está garantida pelo discutido no item anterior,*

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{2n+1}{2}\pi = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

*de onde tem-se $S_1 = \frac{\pi}{4}$. Para a segunda série, tome $x = \sqrt{e}$*

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \frac{2n+1}{4}\pi$$

*Analisemos agora com mais cuidado a seno*

$$\sin \frac{2n+1}{4}\pi = \sin\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$$

*para $n = 0, 1, 2, 3$ temos $\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}, -\sin\frac{\pi}{4}, -\sin\frac{\pi}{4}$, respectivamente, e o padrão se repetira para todo $n \geq 4$. Como $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, teremos*

$$1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \cdots\right),$$

*de onde temos finalmente $S_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.*