Nome: ________________________________ RA: ____________________

TESTE 5 - F520/MS550 - Métodos Matemáticos I, 31 de maio de 2017.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Para as questões abaixo, considere os polinômios de Legendre $P_n(x)$, *i.e.*, as soluções polinomiais da equação diferencial ordinária:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0,$$

sendo n um inteiro não negativo e $x \in \mathbb{R}$. Sabe-se que os $P_n(x)$ satisfazem a seguinte indentidade:

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{1-x^2}{n+1}P_n'(x),$$

e que $P_0(x) = 1$. Considere também que (x, y, z) e (r, θ, ϕ) são as coordenadas cartesianas e esféricas usuais, respectivamente. Sabe-se que o operador Laplaciano em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}.$$

Nenhuma outra fórmula é necessária.

1. Mostre que:

   (a) (2 Pontos) $P_n(\cos\theta) = (-1)^n\dfrac{r^{n+1}}{n!}\dfrac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\dfrac{1}{r}\right)$.

   Solução. *Este é o problema 47 do capítulo 5 do livro. As dicas para solução estão no livro. Notem que a solução envolve resolver também o exercício 46. Para ganhar os 2 pontos, as duas soluções devem ser apresentadas.*

   (b) (2 Pontos) $\nabla^2\left(\dfrac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right) = 0$, $r > 0$.

   Solução. *Do item anterior*

   $$\nabla^2\left(\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

   para $r > 0$, como pode ser mostrado aplicando-se o operador laplaciano em coordendas esféricas ou cartesianas ao potencial $1/r$.

2. Calcule:

   (a) (3 Pontos) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\,dx$, para $m < n$ inteiros não negativos.

   Solução. *Todas essas integrais são nulas. Para mostrar esse fato, devemos lembrar que*

   $$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$$

   se $n \neq m$ e que

   $$x^m = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

(b) (3 Pontos) $\nabla^2 P_n(\cos\theta)$.

Solução. *Aplicando-se diretamente o opeador laplaciano em coordenas esféricas*

$$\nabla^2 P_n(\cos\theta) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial P_n}{\partial\theta}\right) = -n(n+1)\frac{P_n(\cos\theta)}{r^2}$$