# Prova 1 – Métodos Matemáticos – MS550/F 520
3 de maio de 2017

- *Esta prova tem 4 questões. Há um formulário que pode ser útil no verso.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar.*
- *A prova pode ser feita a lápiz e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.*
- **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado e um roteiro para a solução serão divulgados no site do curso:* `http://metodos17.wordpress.com/`

*Boa prova!*

1. Seja $\phi_0$ uma função harmônica ($\nabla^2\phi_0 = 0$) em coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, z)$. Sabe-se que toda função harmônica é analítica-real.

   (a) (1 Ponto) Mostre que as funções
   $$\phi_n = \frac{\partial^n \phi_0}{\partial z^n},$$
   $n = 1, 2, 3, \ldots$, são também harmônicas.

   **Solução.** *O Laplaciano em coordenadas cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$ é $\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. (Vejam o formulário e lembrem-se que $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$). Notem que*
   $$\nabla^2\phi_n = \nabla^2\frac{\partial^n\phi_0}{\partial z^n} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\nabla^2\phi_0 = 0,$$
   *já que as funções harmônica são suaves (pois são analíticas), que é o resultado.*

   (b) (1 Ponto) Determine $\phi_1$ para o caso em que $\phi_0$, em coordenadas esféricas, é $\phi_0 = \frac{1}{r}$.

   **Solução.** *Note que, em coordendas cinlíndricas,*
   $$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$
   e
   $$\phi_1 = \frac{\partial}{\partial z}\phi_0 = -\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$
   *que corresponde ao potencial de um dipolo. Sim, $\phi_2$ será (parte) de um potencial de quadrupolo, $\phi_3$ um octupolo, etc... (Obviamente, $\phi_0$ é um monopolo). A melhor maneira de ver esses "multipolos" é em coordendas cartesianas. Por exemplo, começando-se com o potencial do monopolo*
   $$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

*podemos obter o campo de um dipolo alinhado na direção $\vec{V}$ como $\phi_1 = \vec{V} \cdot \nabla \phi_0$. O qadrupolo é o termo que envolve segundas derivadas, e portanto teremos 6 "componentes", $\partial_x^2$, $\partial_y^2$, $\partial_z^2$, $\partial_x \partial_y$, $\partial_x \partial_y$ e, finalmente, $\partial_y \partial_z$. Assim, o quadrupolo mais geral será algo como*

$$\phi_2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} Q^{ij} \partial_i \partial_j \phi_0,$$

*e os números $Q^{ij}$ são componentes de um tensor. Da mesma maneira, o octupolo é o potencial que envolve terceiras derivadas e assim por diante.*

2. A função Gama pode ser definida a partir da fórmula integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} \, ds.$$

   (a) (1 Ponto) Mostre que a função assim definida converge para todo $z \in \mathbb{C}$ com $\Re z > 0$.

   **Solução.** *Seja $z = x + iy$. Note que*

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^\infty |s^{z-1}| e^{-s} \, ds = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} \, ds.$$

   *A convergência desta última integral depende do comportamento do integrando para $s \to 0$ e $s \to \infty$. No primeiro caso, é necessário $x > 0$ para garantir que a integral seja finita, pois*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{x_0} s^{x-1} e^{-s} \, ds < \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{x_0} s^{x-1} \, ds = \frac{s_0^x}{x} < \infty$$

   *para qualquer $x, s_0 > 0$. No segundo caso, não há restrição para $x$ e isto pode ser visto mostrando que*

$$\lim_{s_1 \to \infty} \int_{s_0}^{s^1} s^{x-1} e^{-s} \, ds < \infty$$

   *para algum $s_0 > 0$. Porem, isto decorre de uma relação simples o crescimento de exponencias e de potências: existe um $s_0 > 0$ para o qual*

$$s^{x-1} \leq e^{\frac{s}{2}}$$

   *para todo $s \geq s_0$. Multiplicando-se por $e^{-s}$ ambos os lados tem-se*

$$s^{x-1} e^{-s} \leq e^{-\frac{s}{2}}$$

   *de onde podemos mostrar que a integral é finita no limite $s \to \infty$.*

   (b) (1 Ponto) Mostre que a função assim definida é analítica.

   **Solução.** *Lembrando-se que $s^{x+iy} = s^x (\cos y \log s + i \sin y \log s)$, tem-se*

$$\Gamma(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} \cos y \log s \, ds + i \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} \sin y \log s \, ds,$$

   *e é imediato mostrar que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.*

3. Considere a equação diferencial ordinária

$$4xy''(x) + 2y'(x) + \alpha^2 y(x) = 0,$$

   sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) (1 Ponto) Identifique classifique seus pontos singulares (para $x$ finito).

**Solução.** *O ponto $x = 0$ é singular, e trata-se de um ponto regular. Já o ponto no $\infty$ é irregular.*

(b) (2 Pontos) Encontre suas duas soluções linearmente independentes.

**Solução.** *Fazendo-se*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r},$$

*temos da equação*

$$4\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\left(k+r-\frac{1}{2}\right)a_k x^{k+r-1} + \alpha^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0$$

*O primeiro somatório pode ser escrito como*

$$\sum_{\ell=-1}^{\infty}(2\ell+2r+1)(2\ell+2r+2)\,a_{\ell+1}x^{\ell+r}$$

*e portanto ficamos com*

$$x^r\left[2r(2r-1)\,a_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left((2k+2r+1)(2k+2r+2)\,a_{k+1} + \alpha^2 a_k\right)x^k\right] = 0$$

*de onde temos que, para $a_0 \neq$, $r = 0$ ou $r = 1/2$. A primeira solução implica em*

$$a_{k+1} = -\frac{\alpha^2 a_k}{(2k+1)(2k+2)}$$

*de onde temos*

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\alpha^2 a_0}{1\cdot 2} \\ a_2 &= \frac{\alpha^4 a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \\ a_3 &= -\frac{\alpha^6 a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \end{aligned}$$

*de onde se puede facilmente ver (ou provar por indução) que $a_n = (-1)^n \frac{\alpha^{2n}a_0}{(2n)!}$. A solução em questão é*

$$y = a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}x^n}{(2n)!} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = a_0\cos\alpha\sqrt{x}.$$

*A segunda solução corresponde a $r = 1/2$, e teremos*

$$a_{k+1} = -\frac{\alpha^2 a_k}{(2k+2)(2k+3)}.$$

*Neste caso, a solução será*

$$y = a_0\sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n}x^n}{(2n+1)!} = \frac{a_0}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{2n+1}(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{a_0}{\alpha}\sin\alpha\sqrt{x}.$$

4. Considere a seguinte equação para uma corda não-homogênea vibrante de comprimento $L$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

sujeita às condições de contorno $u(t,1) = u(t,L+1) = 0$ e a uma condição inicial do tipo $u(0,x) = 0$ (“corda martelada”).

(a) (1.5 Pontos) Mostre que as soluções desse problema são uma superposição de modos de vibração do tipo $u_n = X_n(x) \sin \omega_n t$ e determine o espectro (conjunto de freqüências de vibração $\omega_n$) dessa corda.

**Solução.** *Fazendo-se a separação de variáveis $u(t,x) = T(t)X(x)$, tem-se*

$$\frac{T''}{T} = \frac{1}{X}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dX}{dx}\right) = k$$

*A equação em $x$ é uma equação de Euler*

$$x^2X'' + 2xX' - kX = 0$$

*cuja solução geral é*

$$X(x) = ax^{\lambda_+} + bx^{\lambda_-},$$

*onde $\lambda_+$ e $\lambda_-$ são as duas raizes da equação quadrática*

$$\lambda^2 + \lambda - k = 0,$$

*isto é*

$$\lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}.$$

*A constante de separação $k$ deve ser determinada a partir das condições de contorno em $x$ Neste caso, são elas $X(1) = X(L+1) = 0$. Notem que se $1+4k > 0$, ambos $\lambda_+$ e $\lambda_-$ são reais e diferentes, e a única solução que satisfaz as condições de contorno é a trivial. Assim, precisamos $1+4k < 0$, que implica em $k < 0$, que passaremos a chamar de $k = -\omega^2$. (No caso $1+4k = 0$ também temos que a única solução viável é a trivial, mostrem!). Neste caso, as soluções serão*

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(a\cos\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2-1}\log x + b\sin\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2-1}\log x\right)$$

*e devemos impor as condições de contorno. $X(1) = 0$ implica em $a = 0$, enquanto $X(L+1) = 0$ deve implicar em*

$$\sin\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2-1}\log(L+1) = 0 \Rightarrow \sqrt{\omega_n^2-1} = \frac{2n\pi}{\log(L+1)} \Rightarrow \omega_n^2 = 1 + \frac{4n^2\pi^2}{\log^2(L+1)}$$

*e este é o espectro de nossa corda. Voltando à equação temporal, temos que as soluções possíveis são superposições de modos*

$$T(t) = aX_n(t)\sin\omega_n t + bX_n(t)\cos\omega_n t$$

*Porém, a condição de "corda martelada", implica em $b = 0$, e temos o resultado.*

(b) (1.5 Pontos) Existe alguma corda homogênea, por exemplo de comprimento $L'$, que tenha o mesmo espectro? Comente.

**Solução.** *A resposta é não! E isto tem a ver com o problema já comentado várias vezes do* Can you hear the shape of a drum?. *Procurem isso no google, o verbete da wikipedia é bom.*

*Vamos, primeiro, mostra que a resposta é não. O espectro da corda homogênea de comprimento $L'$ é bem conhecido, é*

$$\varpi_n = \frac{n\pi}{L'}.$$

*Comparando-se com o espectro do item a), vê-se que é impossível reproduzi-lo aqui escolhendo-se um certo $L'$ (mostre que, se $L'$ for escolhido para que os dois espectros tenham mesma frequencia fundamental*

*($n = 1$), já não vão ter para $n = 2$). O interessante aqui é outro aspecto. As "partes altas" dos espectros (grandes $n$) podem ser tão próximos quanto queiramos! Pra isso, mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existirá um $N$ tal que*

$$|\omega_n - \varpi_n| < \varepsilon$$

*para todo $n > N$ se $L' = \log \sqrt{L+1}$ . O ponto aqui, obviamente, é explorar a identidade*

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\log(L+1)} \sqrt{1 + \frac{\log^2(L+1)}{4n^2\pi^2}}$$

*e estimá-la para grandes $n$.*

---

Formulário (eventualmente útil)

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\mathbf{e}_{q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\mathbf{e}_{q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\mathbf{e}_{q_3},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 V_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 V_3)\right]$$