Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 4 - F520/MS550 - Métodos Matemáticos I, 17 de maio de 2017.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

1. (5 Pontos) Calcule, em termos da função Γ a área englobada pela curva plana $|x|^\alpha + |y|^\alpha = r^\alpha$, sendo α e r reais positivos.

Solução. *De maneira análoga ao exercício 18 do Capítulo 5, a área será*

$$S = 4\int_0^r (r^\alpha - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\, dx = 4r^2\int_0^1 (1-s^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\, ds = \frac{4r^2}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}\, dt = \frac{4r^2}{\alpha}B\left(\frac{1}{\alpha}, 1+\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}r^2$$

Obs.: *Na prova, o enunciado estava sem o módulo. Ambas soluções serão consideradas corretas.*

2. (5 Pontos) Calcule a integral

$$I(\mu, z) = \int_0^1 \sqrt{1 - zx^\mu}\, dx,$$

com μ real não negativo e z complexo, em termos de funções Γ e hipergeométricas.
(Dica: Use, se quiser, a representação integral: ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, z) = \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\, dt$.)

Solução. *Fazendo-se a transformação $x^\mu = t$, temos*

$$I(\mu, z) = \int_0^1 \sqrt{1 - zx^\mu}\, dx = \frac{1}{\mu}\int_0^1 t^{\frac{1}{\mu}-1}(1-zt)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{B(1/\mu, 1)}{\mu}\, {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\mu}; 1+\frac{1}{\mu}, z\right) = {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\mu}; 1+\frac{1}{\mu}, z\right).$$

Este problema é semelhante ao 27.h do capítulo 5, e também pode ser resolvido da mesma maneira, explorando-se a série de Taylor de $\sqrt{1-y}$.

3. Considere a função

$$f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)^2}{x\Gamma\left(\frac{2}{x}\right)}.$$

   (a) (3 Pontos) Determine seus limites para $x \to 0$ e $x \to \infty$.

   (b) (2 Pontos) Esta função aparece na solução de uma das questões anteriores. Interprete geometricamente estes limites.

(Dica: Use, se quiser, a fórmula de duplicação de Legendre $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$.)

Solução. *Da formula de duplicação, tem-se*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)^2}{x\Gamma\left(\frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)}{2^{\frac{2}{x}-1}x\Gamma\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}.$$

O limite $x\to\infty$ será

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\Gamma\left(\frac{1}{x}\right) = 2\lim_{x\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2$$

O limite $x \to 0$ pode ser calculado com a mudança de variável $x = 1/z$,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}z\Gamma(z)}{2^{2z-1}\Gamma(z+\frac{1}{2})}.$$

Porem, notem que $\Gamma(z) < \Gamma(z+\frac{1}{2})$ *para todo* z *positivo suficientemente grande* ($z > 2$ *basta), de onde tem-se que o limite é nulo.*

Como se vê, trata-se da problema da área da primeira questão. Para $\alpha \to \infty$, *a área será* $4r^2$, *como se tratasse de um quadrado, enquanto que para* $\alpha \to 0$, *a área se anula.*

Para $\alpha \to \infty$, *trata-se exatamente de um quadrado! Para demonstrar, notem que a curva no primeiro quadrante pode ser escrita como*

$$y = x\sqrt[\alpha]{\left(\frac{r}{x}\right)^{\alpha} - 1},$$

para $x \in (0, r)$. *Note que para, para qualquer* α, $x = 0 \Rightarrow y = r$ *e* $x = r \Rightarrow y = 0$. *Ocorre que para* $x \in (0, r)$, $r/x > 1$, *de forma que*

$$x \lim_{\alpha\to\infty} \sqrt[\alpha]{\left(\frac{r}{x}\right)^{\alpha} - 1} = x\frac{r}{x} = r$$

de forma que a curva, de fato, é a reta horizontal $y = r$, $x \in [0, r)$, *e portanto trata-se de um quadrado de lado* $2r$, *cuja área será* $4r^2$, *como vem da fórmula.*

O limite $\alpha \to 0$ *vem se fizermos* $\beta = 1/\alpha$

$$y = r \lim_{\beta\to\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta} = 0$$

A figura abaixo mostra o aspecto destas curvas para diferentes valores de α. *São eles:* $\alpha = 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5$.

Pode-se ver que para α *grande o aspecto é o de um quadrado, e para* α *pequeno o aspecto é de uma estrela de quatro pontas, com braços cada vez mais finos e, por isso, sua área tende a zero.*