Prova 2 – Métodos Matemáticos – MS550/F 520
28 de junho de 2017

- *Esta prova tem 4 questões. Há um formulário que pode ser útil no verso.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar.*
- *A prova pode ser feita a lápiz e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.*
- **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado e um roteiro para a solução serão divulgados no site do curso:* `http://metodos17.wordpress.com/`

Boa prova!

---

1. (2 Pontos) Determine todos os $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_0^\alpha x^{-\ln x} dx = \int_\alpha^\infty x^{-\ln x} dx,$$

e calcule o valor das respectivas integrais em termos de funções $\Gamma(x)$. (Ou como você preferir).

Solução. *Fazendo-se a mudança de variáveis $x = e^y$, ficamos com*

$$\int_0^\alpha x^{-\ln x} dx = \int_{-\infty}^{\ln \alpha} e^{-y^2+y} dy = \sqrt[4]{e} \int_{-\infty}^{\ln \alpha} e^{-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} dy = \sqrt[4]{e} \int_{\ln \alpha}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} dy = \int_\alpha^\infty x^{-\ln x} dx$$

É evidente que se trata de uma gaussiana com centro em $y = \frac{1}{2}$ e, por simetria, necessariamente teremos $\alpha = \sqrt{e}$, que é solução única. Finalmente,

$$\int_0^{\sqrt{e}} x^{-\ln x} dx = \int_{\sqrt{e}}^\infty x^{-\ln x} dx = \sqrt[4]{e} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt[4]{e}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\sqrt{e}}.$$

2. Para os itens abaixo, considere os polinômios de Laguerre $L_n(x)$, *i.e.* as soluções polinomiais da equação de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

as quais são ortonormais com relação ao produto interno

$$\langle L_n(x), L_m(x) \rangle = \int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{mn}.$$

(a) (1 Ponto) Determine as funções $p(x)$, $q(x)$ e $w(x)$ para as quais a equação de Laguerre pode ser escrita como

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = nw(x)y.$$

Solução. *Como é sabido (sorry!), havia um erro na errata da prova, a equação do enunciado aparecia como* $y'' + (1-x)y' + ny = 0$, *que obviamente não é a Eq. de Laguerre. Para "conter possíveis danos", este item passa a valer 2 pontos, e serão consideradas corretas as duas soluções: para a eq. de Laguerre, e para a equação errada.*

Solução 1. *Multiplicando-se a Eq. de Laguerre por* $w(x)$, *tem-se*

$$-xw(x)y'' - (1-x)w(x)y' = nw(x)y$$

Comparando-se com a forma auto-adjunta, temos que $q(x) = 0$ *e que*

$$\frac{d}{dx}(xw(x)) = (1-x)w(x) \Rightarrow w'(x) = -w(x)$$

de onde temos que $w(x) = e^{-x}$ *e* $p(x) = xe^{-x}$.

Solução 2. *Multiplicando-se a Eq. errada por* $w(x)$, *tem-se*

$$-w(x)y'' - (1-x)w(x)y' = nw(x)y$$

Comparando-se com a forma auto-adjunta, temos que $q(x) = 0$ *e que*

$$w'(x) = (1-x)w(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\ln w = 1-x$$

de onde temos que $w(x) = p(x) = e^{x-\frac{1}{2}x^2}$.

(b) (1 Ponto) Demonstre a fórmula de Rodrigues para os polinômios de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right).$$

Solução. *Com o erro do enunciado, este item ficou inconsistente. Porém, será dado 1 ponto extra para os que resolveram corretamente, o que requeria, obviamente, saber a Eq. de Laguerre correta. (De qualquer forma, notem que isto é um caso particular da seção 5.6.1 do livro.)*

Do enunciado, sabe-se que $L_n(x)$ *é a solução polinomial da equação de Laguerre. A segunda solução LI não é polinomial (de fato, é uma hipergeométrica confluente* ${}_1F_1$, *confiram!). Assim, para demonstrar a fórmula de Rodrigues, basta mostrar que* $L_n(x)$ *assim definida, que óbviamente é um polinômio, satisfaz a equação de Laguerre. A forma auto-adjunta da equação de Laguerre é*

$$-\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right) = ne^{-x}y.$$

Note que

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}x^n\frac{d^k}{dx^k}e^{-x} = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}x^k$$

de onde tem-se

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!x^k}{(n-k)!(k!)^2}$$

Substituindo-se na eq. auto-adjunta

$$-\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{d}{dx}L_n\right) = -\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!kx^k}{(n-k)!(k!)^2}\right) = e^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!kx^k}{(n-k)!(k!)^2} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!k^2x^{k-1}}{(n-k)!(k!)^2}\right)$$

Rearranjando-se o segundo somatório

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!k^2x^{k-1}}{(n-k)!(k!)^2} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n!(k+1)^2x^k}{(n-k-1)!((k+1)!)^2} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(n-k)n!x^k}{(n-k)!(k!)^2}.$$

Combinando-se com o primeiro somatório

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!kx^k}{(n-k)!(k!)^2} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!k^2x^{k-1}}{(n-k)!(k!)^2} = n\left(1+\frac{(-1)^nx^n}{n!}\right) + n\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{n!x^k}{(n-k)!(k!)^2} = nL_n,$$

que mostra que L_n é auto-função com autovalor n da eq. de Laguerre.

3. (2 Pontos) Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\, d\theta \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta,$$

com $n \in \mathbb{N}$ e demonstre, a partir dessas integrais se achar conveniente, o chamado produto de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdots$$

Solução. *Da definição de função Beta do formulário, temos*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\theta\, d\theta = B\left(\frac{1}{2},\frac{m+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

para qualquer inteiro não negativo m. (Este é o exercício 17 do Capítulo 5 do livro). Para $m = 2n$ (caso par), tem-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!}$$

Para o caso impar, teremos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

De onde tem-se a identidade

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\, d\theta} = \frac{n!}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

Das propriedades fundamentais da função $\Gamma(x)$, temos

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\frac{2n-5}{2}\frac{2n-7}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

de onde temos

$$\frac{1}{n!}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2(n-1)}\frac{2n-5}{2(n-2)}\frac{2n-7}{2(n-3)}\cdots\frac{5}{2\cdot 3}\frac{3}{2\cdot 2}\frac{1}{2\cdot 1}\sqrt{\pi}$$

e também

$$\frac{1}{n!}\Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{2n+1}{2n}\frac{2n-1}{2(n-1)}\frac{2n-3}{2(n-2)}\frac{2n-5}{2(n-3)}\cdots\frac{5}{2\cdot 2}\frac{3}{2\cdot 1}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Finalmente, temos

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\, d\theta} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}$$

O produto de Wallis é

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\, d\theta}$$

Resta agora mostrar que esse último limite é 1. Para isto, vamos explorar as integrais calculadas acima. Note que

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\, d\theta} = \frac{n!}{(n+1)!}\frac{\Gamma\left(\frac{2n+2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

Alem disso, das propriedades elementares da função seno, temos

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}\theta d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta$$

de onde temos

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\, d\theta} < 1,$$

que estabelece o limite que procuramos.

Obviamente, este problema não está na prova à toa. Este recente trabalho mostra como determinar o produto de Wallis a partir de considerações de Mecânica Quântica! Vale a pena conferir...

4. Para os itens abaixo, considere o seguinte problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(e^x\dfrac{dy}{dx}\right) = \lambda e^x y, \quad 0 \le x \le 1, \\ \\ y(0) = 0, \\ y(1)\cos\theta + y'(1)\sin\theta = 0, \quad 0 \le \theta < \pi. \end{cases}$$

   (a) (2 Pontos) Resolva este problema para $\theta = 0$ e para $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para ambos os casos, identifique claramente o produto interno segundo o qual as autofunções são ortogonais. Também para ambos os casos, esboce a autofunção de menor autovalor (estado fundamental) e a correspondente ao terceiro autovalor.

   Solução. *Comecemos pela solução da EDO. Trata-se de equação*

$$y'' + y' + \lambda y = 0,$$

   cuja solução geral é

$$y(x) = Ae^{\kappa_+ x} + Be^{-\kappa_- x},$$

   com

$$\kappa_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

   para $\lambda \neq \frac{1}{4}$. Para $\lambda = \frac{1}{4}$ (amortecimento crítico), a solução da EDO será

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A + Bx).$$

Vamos agora resolver o PVC para $\theta = 0$, que corresponde a $y(0) = y(1) = 0$. Apenas as soluções oscilatórias vão contribuir para o problema. Estas são do tipo

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A \sin \varpi x + B \cos \varpi x),$$

com $\varpi^2 = \lambda - \frac{1}{4} > 0$. A primeira condição inicial implica $B = 0$, a segunda nos dará a equação dos autovalores

$$\varpi = n\pi,$$

de onde temos que as soluções para o problema são os seguintes pares autovalores/autofunções

$$\left(n^2\pi^2 + \frac{1}{4}, e^{-\frac{1}{2}x} \sin n\pi x\right)$$

As autofunções são ortogonais com respeito ao produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 e^x f g dx$$

Para o caso $\theta = \frac{\pi}{2}$, a condição de contorno será $y(0) = y'(1) = 0$. Novamente, somente as soluções oscilatórias vão contribuir. A primeira condição de contorno implica que a autofunção será do tipo

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \varpi x$$

A segunda condição será

$$y'(1) = e^{-\frac{1}{2}} \varpi \cos \varpi - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \sin \varpi = 0.$$

que implica numa equação como a correspondente à figura 6.1 do livro

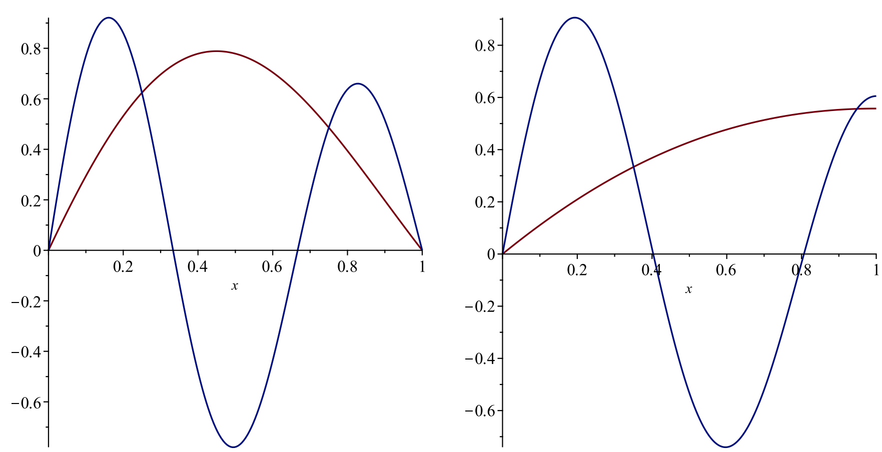
$$\tan \varpi = 2\varpi,$$

cujos zeros podem ser obtidos graficamente. Suponham que sejam $\{\varpi_n\}$. Os autovalores/autofunções serão

$$\left(\varpi_n^2 + \frac{1}{4}, e^{-\frac{1}{2}x} \sin \varpi_n x\right)$$

e o produto interno é o mesmo do caso anterior.

O aspecto das autofunções com $n = 1$ e $n = 3$, para os dois casos, é o seguinte (Na prova, deve-se



identificar claramente as condições de contorno e o número de zeros da solução.)

(b) (2 Ponto) Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$, sempre haverá um θ para o qual $\lambda = \epsilon$ é um autovalor deste problema. Há algum θ para o qual $\lambda = 0$ seja autovalor?

Solução. *Comecemos com a segunda pergunta. Vamos mostrar que existe um θ que permite uma autofunção com $\lambda = 0$, o que mostra que a intuição formada a partir dos casos resolvidos no item anterior, para os quais $\lambda > \frac{1}{4}$, não é completa para este problema. (Uma vez mais, está questão não está à toa na prova...) Para $\lambda = 0$, a solução da EDO é*

$$y(x) = Ae^{-x} + B.$$

Impondo-se a condição $y(0)$, ficamos com a solução

$$y(x) = e^{-x} - 1.$$

Note que a condição geral para $x = 1$ pode ser escrita como

$$\cot\theta = -\frac{y'(1)}{y(1)},$$

com $0 \leq \theta < \pi$, que **sempre** *terá uma solução. Para o nosso caso, isto corresponde a*

$$\theta = \cot^{-1}\left(\frac{1}{1-e}\right).$$

Vamos por ora considerar $\lambda \neq \frac{1}{4}$. Impondo-se a condição de contorno $y(0) = 0$, temos

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\sinh\kappa x$$

com $\kappa^2 = \frac{1}{4} - \lambda$, para qualquer $\lambda \neq \frac{1}{4}$. (No caso em que $\kappa^2 < 0$, o seno hiperbólico se tranforma no seno usual, e temos o caso do item anterior). Para $0 \leq \lambda < \frac{1}{4}$, a condição de $x = 1$ será

$$\cot\theta = -\frac{y'(1)}{y(1)} = \frac{1}{2} - \kappa\coth\kappa$$

(note que $\kappa = 1/2$ é o caso anterior, $\lambda = 0$). Os casos $\lambda \geq 1/4$ são análogos.

Formulário (eventualmente útil)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \mathrm{Real}(z) > 0$$

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2z-1}\sin^{2w-1}d\theta = \int_0^1 t^{w-1}(1-t)^{z-1}dt$$