Nome: ____________________ RA: ____________________

TESTE 2 - F520/MS550 - Métodos Matemáticos I, 5 de abril de 2017.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

1. (4 Pontos) Determine, e esboce no plano complexo, os valores de $z \in \mathbb{C}$ para os quais

$$\cosh z = \mu,$$

com $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrário. São os zeros de $f(z) = \cosh z - \mu$ sempre simples?

Solução. *Lembrando que*

$$\cosh(x+iy) = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$$

$$\sinh(x+iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)$$

temos que $\operatorname{Im}\cosh(x+iy) = 0$ *requer* $x = 0$ *ou* $y = n\pi$*, com* n *inteiro. As soluções com* $x = 0$ *serão do tipo*

$$\cosh z = \cosh iy = \cos y = \mu,$$

de onde temos que para $-1 \le \mu \le 1$*, a solução será* $z = i\,(\pm\arccos\mu + 2m\pi)$*. O esboço é simples: para cada um dos sinais* $+/-$*, a sequência de zeros está ao longo do eixo imaginário, com espaços regulares de* 2π*. Para este caso, temos*

$$\sinh z = \sinh iy = \pm i \sin\arccos\mu = \pm i\sqrt{1-\mu^2},$$

de onde temos que todos os zeros serão simples, exceto os dos casos $\mu = \pm 1$*. Notem que para* $\mu = 1$*, há um zero sobre a reta real, e que para* $\mu = 0$ *os zeros são* $z = i\frac{\pi}{2} + im\pi$*.*

Vamos agora ao caso $y = n\pi$*, para o qual*

$$\cosh z = (-1)^n \cosh x = \mu$$

de onde temos 2 possibilidades: para $\mu > 1$*,* n *deve ser par, e nesse caso* $z = \pm\operatorname{arccosh}\mu + 2im\pi$*. Para* $\mu < -1$*,* n *deve ser impar, e nesse caso* $z = \pm\operatorname{arccosh}(-\mu) + (2m+1)i\pi$*. Em ambos os casos, os esboços são simples: estão sobre as retas verticais* $x = \pm\operatorname{arccosh}|\mu|$*, espaçados de* 2π*, sendo que no primeiro caso há dois zeros sobre a reta real. A derivada no zero neste caso será*

$$\sinh z = (-1)^n \sinh x = \pm\sinh\operatorname{arccosh}|\mu| = \pm\sqrt{\mu^2 - 1}$$

o que mostra que todos os zeros neste caso são simples.

2. (6 Pontos) Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx.$$

Solução. *Notem que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx\right).$$

Do item anterior, sabemos que todos os polos do integrando são $z = i\frac{\pi}{2} + im\pi$. Notem que

$$\oint \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz = \oint \frac{(z - i\frac{\pi}{2})e^{iz}}{(z - i\frac{\pi}{2})\cosh z} dz = 2\pi i \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \frac{(z - i\frac{\pi}{2})e^{iz}}{\cosh z} = 2\pi e^{-\frac{\pi}{2}},$$

onde o caminho de integração engloba o polo $z = i\frac{\pi}{2}$. Este caminho pode ser deformado, sem alterar o valor da integral, para um caminho quadrado com vértices nos pontos $(-R, 0)$, $(R, 0)$, $(R, i\pi)$ e $(-R, i\pi)$. A integral entre os dois primeiros e entre os dois últimos vértices serão

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx - \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix-\pi}}{\cosh(x + i\pi)} dx = (1 + e^{-\pi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx.$$

As outras integrais se anulam para $R \to \infty$, como podemos verificar, por exemplo, daquela entre o segundo e o terceiro vértice

$$\left| i \int_0^{\pi} \frac{e^{iR-y}}{\cosh(R + iy)} dy \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{iR-y}}{\cosh(R + iy)} \right| dy = \frac{1}{\cosh R} \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}}{|\cos y + i \tanh R \sin y|} dy \leq \frac{1}{\cosh R} \int_0^{\pi} e^{-y} dy = \frac{1 - e^{-\pi}}{\cosh R}$$

Temos, finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx = 2\pi \frac{e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{2\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}} = \frac{\pi}{\cosh \frac{\pi}{2}}$$