Nome: ______________________________ RA: ____________________

TESTE 1 - F520/MS550 - Métodos Matemáticos I, 22 de março de 2017.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Considere as afirmações abaixo, que dizem respeito a funções suaves $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Prove as verdadeiras e de um contra-exemplo para as falsas. Lembrando, as coordenadas cilindricas (r, ϕ, z) são tais que

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \\ z = z, \end{cases}$$

e para coordenadas curvilíneas genéricas (q_1, q_2, q_3), os operadores gradiente e divergente são dados por

$$\nabla\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\hat{e}_3$$

$$\nabla\cdot(v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3v_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2v_3)\right)$$

1. (2 Pontos) $\hat{e}_\phi\cdot\nabla\varphi = 0$, se $\varphi = \varphi(x^2+y^2, z)$.

   Solução. *Verdadeira. Notem que $\varphi(x^2+y^2, z) = \varphi(r, z)$, que implica em $\partial_\phi\varphi = 0$, de onde segue o resultado.*

2. (2 Pontos) $\hat{e}_\phi\cdot(\hat{e}_r\times\nabla\varphi) = 0$ para qualquer φ suave.

   Solução. *Falsa. Basta tomar $\varphi = z$, e teremos $\nabla\varphi = \hat{e}_z$.*

3. (2 Pontos) $\hat{e}_r\times(\hat{e}_z\times\nabla\varphi) = 0$, para qualquer φ suave.

   Solução. *Falsa. Basta tomar $\varphi = r$, e teremos $\nabla\varphi = \hat{e}_r$.*

4. (2 Pontos) $\nabla\cdot(\hat{e}_r\times\nabla\varphi) = 0$, se $\varphi = \varphi(x^2+y^2, z)$.

   Solução. *Verdadeira. Notem que $\varphi(x^2+y^2, z) = \varphi(r, z)$, que implica em $\nabla\varphi = \partial_r\varphi\hat{e}_r + \partial_z\varphi\hat{e}_z$, de onde temos $\hat{e}_r\times\nabla\varphi = -\partial_z\varphi\hat{e}_\phi$, cujo divergente é nulo.*

5. (2 Pontos) $\nabla\cdot(\hat{e}_z\times\nabla\varphi) = 0$, se $\varphi = \varphi(x^2+y^2, z)$.

   Solução. *Verdadeira. Solução análoga ao item anterior.*