Nome: ____________________________________ RA: ______________________

TESTE 3 - F520/MS550 - Métodos Matemáticos I, 19 de abril de 2017.

*(**Atenção:** Procure responder todas as questões nesta folha. Use o verso e evite folhas soltas.)*

Para as questões abaixo, considere a equação diferencial ordinária

$$x^2y''(x) + nxy'(x) + \left(\frac{m}{4} - x^2\right) y(x) = 0,$$

sendo $n, m \in \mathbb{Z}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. (2 Pontos) Identifique e classifique seus pontos singulares (para x finito).

   Solução. *Como $p(x) = nx^{-1}$ e $q(x) = m/4x^2 - 1$, é evidente que $x = 0$ é a única singularidade, e que é regular, já que xp e x^2q são ambas funções suaves.*

2. (3 Pontos) Para que pares (n, m) esta equação admitirá pelo menos uma solução analítica (real)?

   Solução. *Do método de Frobenius (teorema de Fuchs), sabemos que a equação terá uma solução do tipo*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}.$$

Substituindo-se na equação, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+r)(k+r-1)a_k + n(k+r)a_k + \frac{m}{4}a_k\right] x^{k+r} - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k+r} = 0.$$

Portanto, temos as seguintes relações

$$k = 0 \Rightarrow \left(r^2 + (n-1)r + \frac{m}{4}\right) a_0 = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow \left(r^2 + (n+1)r + n + \frac{m}{4}\right) a_1 = 0$$

$$k > 1 \Rightarrow \left((k+r)(k+n+r-1) + \frac{m}{4}\right) a_k = a_{k-2}$$

Para $k = 0$, devemos ter $a_0 = 0$ ou

$$r_\pm = \frac{1-n}{2} \pm \frac{\sqrt{(n-1)^2 - m}}{2}.$$

Para $k = 1$, devemos ter $a_1 = 0$ ou

$$r_\pm = -\frac{1+n}{2} \pm \frac{\sqrt{(n-1)^2 - m}}{2}.$$

Para que pelo menos umas das soluçõe seja analítica, precisamos que pelo menos uma das raizes das equações indiciais seja um inteiro não negativo (1.5 Pontos se chagar até aqui). Ambos os casos irão requerer

$$m = (n-1)^2 - q^2,$$

sendo q um inteiro, e teremos das equações indiciais

$$1 - n \pm q = 2p, \quad -(1+n) \pm q = 2p$$

com $p \in 0, 1, 2, \ldots,$ *de onde temos que*

$$m = 4p(1 - n - p) \quad \text{ou} \quad m = -4(p + 1)(n + p).$$

com $n \in \mathbb{Z}$ *e* $p \in 0, 1, 2, \ldots$. *Note que a primeira condição pode ser escrita como* $m = -4(r + 1)(n + r)$, *com* $r \in -1, 0, 1, 2, \ldots$ *Portanto, para todos os pares* $(n, -4(p+1)(n+p))$, *com* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $p \in -1, 0, 1, 2, \ldots$ *a equação terá pelo menos uma solução analítica.*

3. (5 Pontos) Resolva esta equação para o caso $m = n^2 - 2n$.

Solução. *As raizes das equações indiciais neste caso são*

$$k = 0 \Rightarrow r_{\pm} = \frac{1 - n}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow -\frac{1 + n}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Tomando $r = -n/2$ *para ambos os casos* $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 0$, *teremos a seguinte relação de recorrência, válida para ambos os casos também*

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{k(k-1)}$$

cuja solução geral é

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!}$$

e

$$a_{2k-1} = \frac{a_1}{(2k-1)!}$$

de onde é evidente que a solução geral da equação neste caso será

$$y(x) = a_0 \frac{\cosh x}{\sqrt{x^n}} + a_1 \frac{\sinh x}{\sqrt{x^n}}$$