Exame Final – Métodos Matemáticos – MS550/F 520
10 de julho de 2017

- *Este exame tem 6 questões. Sua nota será a soma das suas cinco melhores soluções. Há um formulário que pode ser útil no verso.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar.*
- *A prova pode ser feita a lápis e fora de ordem, mas procure que suas soluções sejam legiveis. Não é necessário repetir o enunciado, mas identifique claramente que questão está resolvendo.*
- **Não entregue** *seus rascunhos. Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado e um roteiro para a solução serão divulgados no site do curso:* `http://metodos17.wordpress.com/`

Boa prova!

---

1. Considere o sistema de coordenadas (u, θ, ϕ) dado, em função das coordenadas cartesianas usuais, por $x = a \sinh u \sin\theta \cos\phi$, $y = a \sinh u \sin\theta \sin\phi$ e $z = a \cosh u \cos\theta$, com $a > 0$, $u \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$.

   (a) (0.5 Ponto) As coordenadas (u, θ, ϕ) são ortogonais? Justifique.

   Solução. *Sim. Estas são as coordenadas esferoidais prolatas, o sexto sistema apresentado no Exercício Extra. Para mostrarmos que de fato o sistema é ortogonal, basta calcular, com a notação do livro,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_u &= \partial_u \mathbf{r} = a \cosh u \sin\theta \cos\phi \hat{\imath} + a \cosh u \sin\theta \sin\phi \hat{\jmath} + a \sinh u \cos\theta \hat{k} \\
\mathbf{e}_\theta &= \partial_\theta \mathbf{r} = a \sinh u \cos\theta \cos\phi \hat{\imath} + a \sinh u \cos\theta \sin\phi \hat{\jmath} - a \cosh u \sin\theta \hat{k} \\
\mathbf{e}_\phi &= \partial_\phi \mathbf{r} = -a \sinh u \sin\theta \sin\phi \hat{\imath} + a \sinh u \sin\theta \cos\phi \hat{\jmath}
\end{aligned}$$

   e verificar que estes vetores são ortogonais.

   (b) (1 Ponto) Identifique as superfícies correspondentes a u, θ e ϕ constantes.

   Solução. *As superfícies correspondentes a u e θ constantes são quádricas confocais. Vejam:*

$$\frac{x^2}{a^2 \sinh^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 u} + \frac{z^2}{a^2 \cosh^2 u} = 1.$$

   Trata-se de um elipsóide. (Não era necessário identificar os focos, mas neste caso estão nos pontos $(0, 0, \pm a)$.) Por outro lado, temos

$$\frac{x^2}{a^2 \sin^2 \theta} + \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \theta} = -1.$$

que se trata de um hiperbolóide de uma folha (de revolução, com mesmos focos que o elipsoide, daí o termo "superfícies quádricas confocais".) As superfícies com ϕ constantes são os planos

$$\frac{x}{\cos\phi} - \frac{y}{\sin\phi} = 0,$$

que contém inteiramente o eixo z.

(c) (0.5 Ponto) Que ponto(s) de $\mathbb{R}^3$ corresponde(m) aos casos: i)$u = 0$, ii)$\theta = 0$ e iii)$\theta = \pi$?

Solução. *São casos degenerados das quádricas confocais. Tomando-se $u = 0$, tem-se $x = y = 0$ e $z = a\cos\theta$. Como $0 \leq \theta \leq \pi$, vemos que trata-se do segmento de reta $x = y = 0$, $-a \leq z \leq a$. O caso $\theta = 0$ corresponde a $x = y = 0$ e $z = a\cosh u$. Como $u \geq 0$, vemos que se trata da semi-reta $x = y = 0$, $z \geq a$. O caso $\theta = \pi$, de maneira análoga, será a semi-reta $x = y = 0$, $z \leq -a$.*

2. A função Seno Integral é definida como $\mathrm{Si}(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt$, com $z \in \mathbb{C}$.

(a) (1 Ponto) Esta função é analítica em todo o plano complexo $\mathbb{C}$? Justifique.

Solução. *Sim, é analítica. O integrando é analítico em todo o plano, portanto a integral não depende do caminho, e teremos*

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Si}(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

(b) (1 Ponto) Escreva sua série de Laurent em torno da origem $z = 0$.

Solução. *Como*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

temos

$$\mathrm{Si}(z) = z - \frac{z^3}{3\cdot 3!} + \frac{z^5}{5\cdot 5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

3. (2 Pontos) Calcule $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x - e^{\beta x}}\,dx$, com $\alpha,\beta > 0$, em termos de funções $\Gamma(x)$ (ou como você preferir) e determine $\displaystyle\lim_{\beta\to\infty} I(\alpha,\beta)$.

Solução. *Introduzindo-se a variável $y = e^{\beta x}$ tem-se*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x - e^{\beta x}}\,dx = \frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} y^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-y}\,dy = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

O limite será

$$\lim_{\beta\to\infty} I(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha}\lim_{\beta\to\infty}\frac{\alpha}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha}\lim_{\beta\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha}.$$

4. (2 Pontos) Considere a equação diferencial ordinária $xy''(x) - y'(x) + 4\alpha^2 x^3 y(x) = 0$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Classifique seus pontos singulares para todos valores de α, **incluindo** x infinito, e encontre suas duas soluções linearmente independentes.

Solução. *Note que a equação é da forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, com $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = 4\alpha^2 x^2$. O ponto $x = 0$ é singular regular para qualquer valor de α. Para analisar o ponto $x = \infty$, vamos considerar a transformação de variáveis $w = 1/z$, que levará a equação à forma $y'' + P(w)y' + Q(w)y = 0$, com*

$$P(w) = \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{3}{w}, \quad Q(w) = \frac{1}{w^4}q\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{4\alpha^2}{w^6},$$

de onde tem-se que o ponto $x = \infty$ $(w = 0)$ é irregular para $\alpha \neq 0$ e regular para $\alpha = 0$.

Fazendo-se

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r},$$

temos da equação

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-2)\, a_k x^{k+r-1} + 4\alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+3} = 0.$$

O primeiro somatório pode ser escrito como

$$\sum_{\ell=-1}^{\infty} \left((\ell+r)^2 - 1\right) a_{\ell+1} x^{\ell+r}$$

e o segundo como

$$\sum_{\ell=3}^{\infty} a_{\ell-3} x^{\ell+r}$$

e portanto ficamos com

$$x^r \left[\left(r^2 - 2r\right) a_0 x^{-1} + (r^2-1)a_1 + (r^2+2r)a_2 x + (r^2+4r-3)a_3 x^2 + \sum_{\ell=3}^{\infty} \left[\left((\ell+r)^2 - 1\right) a_{\ell+1} - 4\alpha^2 a_{\ell-3} \right] x^{\ell} \right] = 0,$$

o que nos dá várias possibilidades. Vamos escolher, por simplicidade, $r = 0$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Teremos a seguinte recorrência

$$a_{k+4} = -\frac{4\alpha^2 a_k}{(k+3)^2 - 1}.$$

Já vemos que apenas os termos com k múltiplo de 4 vão aparecer na série. Notem tambem que $(k+3)^2 - 1 = (k+2)(k+4)$. Vamos escrever a recorrência como

$$a_{2(\ell+2)} = -\frac{\alpha^2 a_{2\ell}}{(\ell+1)(\ell+2)},$$

com $\ell = 0, 2, 4, \ldots$. Teremos

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{\alpha^2 a_0}{1 \cdot 2} \\ a_8 &= \frac{\alpha^4 a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ a_{12} &= -\frac{\alpha^6 a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \end{aligned}$$

de onde se pode facilmente ver (ou provar por indução) que $a_{4n} = (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} a_0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. A solução em questão é

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} x^{4n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha x^2)^{2n}}{(2n)!} = a_0 \cos \alpha x^2.$$

A segunda solução ($y = a_1 \sin \alpha x^2$) corresponde a $r = 1$, $a_0 = a_2 = a_3 = 0$.

5. Para os itens abaixo, considere o seguinte problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \\ y(1) \sin\theta + y'(1) \cos\theta = 0, \quad 0 \leq \theta < \pi. \end{cases}$$

(a) (1 Ponto) Mostre que para qualquer $\epsilon \geq 0$, sempre haverá um θ para o qual $\lambda = \epsilon^2$ é um autovalor do problema.

Solução. *Para $\lambda = \epsilon^2 > 0$, a solução da equação que satisfaz $y(0) = 0$ é*

$$y(x) = \sin \epsilon x.$$

Em $x = 1$, devemos ter

$$\sin \epsilon \sin \theta + \epsilon \cos \epsilon \cos \theta = 0 \Rightarrow \cot \theta = -\frac{\tan \epsilon}{\epsilon},$$

que sempre tem solução. O caso $\lambda = 0$ é

$$y(x) = Ax + b.$$

Da condição $y(0) = 0$, temos que a solução será $y(x) = x$. A condição em $x = 1$ é

$$\sin \theta + \cos \theta = 0,$$

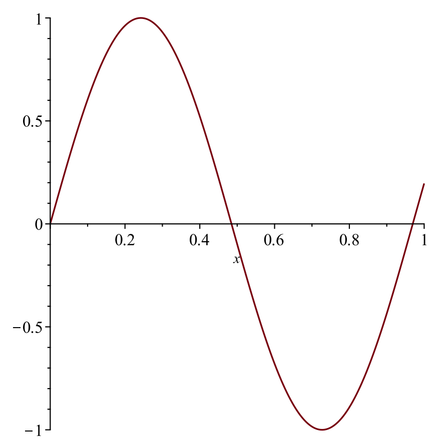
que corresponde a $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

(b) (1 Ponto) Esboce a autofunção correspondente a $\lambda = 42$. (Seu esboço deve mostrar inequivocamente o número de zeros da autofunção e seu comportamento nos extremos do intervalo.)

Solução. *Trata-se da autofunção*

$$y(x) = \sin \sqrt{42} x.$$

Do formulário, temos $2\pi < \sqrt{42} < \sqrt{5}\pi < \frac{5\pi}{2}$, e portanto no intervalo $[0, 1]$ esta autofunção tem 2 zeros (trata-se então de uma autofunção com $n = 3$), com $y(1) > 0$ e $y'(1) > 0$. O aspecto da autofunção é o seguinte:



6. Considere a seguinte equação para uma corda não-homogênea vibrante de comprimento L

$$e^{bx} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{bx} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

com $b \in \mathbb{R}$, sujeita às condições de contorno $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ e a uma condição inicial do tipo $\dot{u}(0, x) = 0$ e $u(0, x) = f(x)$ ("corda dedilhada").

(a) (1 Ponto) Mostre que as soluções desse problema são uma superposição de modos de vibração do tipo $u_n = X_n(x)\cos\omega_n t$ e determine o espectro (conjunto de freqüências de vibração ω_n) e as respectivas autofunções X_n dessa corda.

Solução. *Fazendo-se a separação de variáveis $u(t,x) = T(t)X(x)$, tem-se*

$$\frac{T''}{T} = e^{-bx}\frac{1}{X}\frac{d}{dx}\left(e^{bx}\frac{dX}{dx}\right) = -k$$

A equação em x é

$$X'' + bX' + kX = 0$$

cuja solução geral é

$$X(x) = e^{\varpi_+ x} + e^{\varpi_- x},$$

onde $\varpi_\pm$ são as duas raizes da equação quadrática

$$\varpi^2 + b\varpi + k = 0,$$

isto é

$$\varpi_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}.$$

A constante de separação k deve ser determinada a partir das condições de contorno em x Neste caso, são elas $X(0) = X(L) = 0$. Notem que se $b^2 - 4k > 0$, ambos ϖ_+ e ϖ_- são reais e diferentes, e a única solução que satisfaz as condições de contorno é a trivial. Assim, precisamos $b^2 - 4k < 0$. Neste caso, as soluções serão

$$X(x) = e^{-\frac{b}{2}x}\left(A\cos\sqrt{k - \frac{b^2}{4}}x + B\sin\sqrt{k - \frac{b^2}{4}}x\right)$$

e devemos impor as condições de contorno. $X(0) = 0$ implica em $A = 0$, enquanto $X(L) = 0$ deve implicar em

$$\sin\sqrt{k - \frac{b^2}{4}}L = 0 \Rightarrow \sqrt{k_n - \frac{b^2}{4}} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow k_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{b^2}{4} = \omega_n^2.$$

e este é o espectro de nossa corda. Voltando à equação temporal, temos que as soluções possíveis são superposições de modos

$$T(t) = AX_n(t)\sin\omega_n t + BX_n(t)\cos\omega_n t$$

Porém, a condição de "corda dedilhada", implica em $A = 0$, e temos o resultado. Os modos são $X_n(x) = e^{-\frac{b}{2}x}\sin\frac{n\pi x}{L}$.

(b) (1 Ponto) Suponha que você conheça o espectro completo desta corda, mas não os valores de b e L. É possível determinar b e L univocamente a partir do espectro? Comente.

Solução. *Não é possível. Conhecendo-se o espectro completo (na verdade, basta saber o dois primeiros autovalores) podemos determinar apenas L e $|b|$. Não é possível se obter o sinal de b a partir do espectro. Há um motivo físico para isto. Considere nossa equação de onda com $b > 0$. Fazendo-se a transformação $x = -x$, obtemos o caso correspondente a $-b$. Porém, a corda "refletida" ($x = -x$) é idêntica, no que diz respeito às suas vibrações, a corda original "girada" em torno da origem. Não se espera que um violão soe de maneira diferente se girado, certo? You cannot hear the guitar orientation! Boas férias!*

Formulário (eventualmente útil)

$$4\pi^2 < 42 < 5\pi^2$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathrm{Real}(z) > 0$$