Nome: ____ RA: ________________________

Teste 2 - MA 211 - Cursão, turma __, 11 de setembro de 2009.

Boa prova!

1. Considere a esfera $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = r^2$ e o hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

   (a) (2 Ponto) Determine e classifique o local geométrico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ correspondente à intersecção entre a esfera e o hiperbolóide.

   Solução. *Esfera:* $x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 - r^2 = 0$, *hiperbolóide:* $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. *Subtraindo-se, temos:* $2z^2 - 2az + a^2 - r^2 + 1 = 0$, *cujas soluções são:*

   $$z_{\pm} = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{2(r^2-1) - a^2}\right).$$

   Caso 1: $2(r^2 - 1) < a^2$. *Não há intersecção.*

   Caso 2: $2(r^2 - 1) = a^2$. *A intersecção é a circunferência* $x^2 + y^2 = 1 + a^2/4$, *contida no plano* $z = a/2$.

   Caso 3: $2(r^2 - 1) > a^2$ *A intersecção é a união entre a circunferência* $x^2 + y^2 = 1 + z_+^2$, *contida no plano* $z = z_+$, *e a circunferência* $x^2 + y^2 = 1 + z_-^2$, *contida no plano* $z = z_-$.

   (b) (2 Ponto) Determine que condições sobre a e r implicariam em ***alguma*** intersecção ortogonal (planos tangentes perpendiculares nos pontos de intersecção).

   Solução. *Vetor normal à esfera:* $\vec{V} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + (z-a)\hat{e}_3$. *Vetor normal ao hiperbolóide* $\vec{W} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 - z\hat{e}_3$. *Ortogonalidade entre* $\vec{V}$ *e* $\vec{W}$ *implica em* $\vec{V}\cdot\vec{W} = x^2 + y^2 - z(z-a) = 0$. *As intersecções ortogonais correspondem, portanto, às soluções do sistema*

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2az = r^2 - a^2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 + az = 0 \end{cases}$$

   Comparando-se a segunda e a terceira, tem-se que, necessariamente, $a \neq 0$ *e que* $z = -1/a$. *As intersecções, se existirem, têm partes contidas nos planos* $z = z_+$ *e* $z = z_-$. *Para que alguma dessas intersecções seja ortogonal, precisamos que* $z_+ = -1/a$ *ou* $z_- = -1/a$, *que implica em*

   $$2r^2 = \frac{(a^2+2)^2}{a^4} + a^2 + 2.$$

   (c) (2 Ponto) Determine que relações entre a e r implicam na tangência entre a esfera e o hiperbolóide.

   Solução. *Caso 2 acima. Basta ver que, para que* $\vec{W}$ *e* $\vec{V}$ *sejam L.D., necessita-se que* $z = a/2$.

2. (4 Pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável com inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ também diferenciável. Seja $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a a derivada total de f no ponto a, ou seja, $T_a(y) = Df(a)y$. Mostre que T_a é uma transformação linear invertível.

   Solução. *Seja* $f(a) = b$. *Como* f *é diferenciável, temos* $f(a + v) = b + T_a(v) + ||v||E(a, v)$, *sendo* $T_a(v) =$

$Df(a)v$. Como sua inversa também é diferenciável, temos $f^{-1}(b+w) = a + \tilde{T}_b(w) + ||w||\tilde{E}(b,w)$, sendo $\tilde{T}_b(w) = D(f^{-1})(b)w$. Note que $f^{-1}(f(a)) = a$, que implica em $D(f^{-1}(f(a))) = D(f^{-1})(b)Df(a) = \mathbb{I}$, de onde se tem que $\tilde{T}_b(T_a(v)) = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, isto é, $\tilde{T}_b(w)$ é a inversa de $T_a(v)$.

3. (2 Pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (u,v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$. Mostre explicitamente que, neste caso, tem-se $D\left(f^{-1}\right)(u,v) = [Df(x,y)]^{-1}$.

   Solução. *Note que f^{-1} corresponde a $(x,y) = (u+v, u-v)$. Temos: $Df = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ e $D\left(f^{-1}\right) = 2Df$, de onde segue que $[Df][D\left(f^{-1}\right)] = \mathbb{I}$.*