Nome: ____________________ RA: ____________

Teste 3 - MA 211 - Cursão, turma __ , 25 de setembro de 2009.

Boa prova!

1. Seja $\mathcal{P}_h$ o tronco de parabolóide elíptico de altura h definido por $z = x^2 + y^2$, $z \leq h$.

   (a) (3 Pontos) Determine o raio da maior esfera que pode ser inscrita em $\mathcal{P}_h$. (Dica: o centro da esfera está no eixo de simetria.)

   Solução. *Seja $P = (0,0,z_0)$ o centro da esfera. O raio da esfera com centro em P corresponde à menor distância entre o ponto P e o parabolóide,* i.e., *corresponde ao mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z - z_0^2)$ com a condição extra $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$. Os pontos críticos satisfazem as equações do parabolóide e*

$$\nabla f = \lambda \nabla g = 2(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + (z - z_0)\hat{k}) = \lambda(2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} - \hat{k})$$

   Há duas soluções possíveis: a) $x = y = z = 0$ e $\lambda = z_0$, correspondendo a $r = z_0$ e $h = 2z_0$; e b) $\lambda = 1$ e $z = z_0 - 1/2$, correspondendo a $r = \sqrt{z_0 - 1/4}$ e $h = z_0 + \sqrt{z_0 - 1/4}$. Note que b) só existe se $z_0 \geq 1/2$, que corresponde a $h \geq 1$. A menor distância corresponde sempre ao caso b), se ele existir (Mostre!). O raio da maior esfera que pode ser inscrita no tronco de parabolóide é, portanto, dado por

$$r = \begin{cases} h/2, & \text{se } 0 < h \leq 1, \\ \sqrt{h} - 1/2 & \text{se } h > 1. \end{cases}$$

   (b) (2 Pontos) Determine os pontos de contato entre a esfera e $\mathcal{P}_h$.

   Solução. *Para $h \leq 1$, a esfera toca a origem. Para $h > 1$, a esfera toca a circunferência $x^2 + y^2 = z_0 - 1/2$ contida no plano $z = z_0 - 1/2$, sendo que $z_0 = r^2 + 1/4$. (Além disso, sempre temos o contato na tampa no ponto $(0,0,h)$).*

   Fato curioso decorrente deste exercício: pequenas esferas ($r \leq 1/2$), quando jogadas dentro do parabolóide, "tocam" seu fundo. Já esferas maiores ($r > 1/2$) ficam "travadas" (engarrafadas, jammed), presas nas paredes, e não chegam ao fundo. Para quem quiser ler mais sobre problemas deste tipo, sugiro esta discussão interessante. (Você deve estar na UNICAMP para ter acesso).

2. Considere o problema de encontrar o volume mínimo limitado pelo planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e um plano tangente ao elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

   em um ponto no octante $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

   (a) (1 Ponto) Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide no ponto (x_0, y_0, z_0) é igual a:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Solução. *A equação de um plano que passa no ponto (x_0, y_0, z_0) e tem vetor normal $\vec{N} = n_1\hat{e}_1 + n_2\hat{e}_2 + n_3\hat{e}_3$ é $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0)n_3(z - z_0) = 0$. O vetor normal ao elipsóide no ponto (x_0, y_0, z_0) é $\vec{N} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0/a^2)\hat{e}_1 + 2(y_0/b^2)\hat{e}_2 + 2(z_0/c^2)\hat{e}_3$, sendo $f(x, y, z)$ a equação do elipsóide. A equação do plano segue diretamente destes resultados.*

(b) (1 Ponto) Como o método de multiplicadores de Lagrange se aplica ao problema? Em outras palavras, defina o método e faça a relação com o problema dado.

Solução. *Trata-se de uma pirâmide. O volume de uma pirâmide é dado por $V = Ah/3$, sendo A a área de sua base e h sua altura. Os vértices da pirâmide são a origem e os pontos de intersecção do plano tangente ao elipsóide e os eixos coordenados: $(a^2/x_0, 0, 0)$, $(0, b^2/y_0, 0)$ e $(0, 0, c^2/z_0)$. Neste caso, temos: $A = a^2b^2/(2x_0y_0)$ e $h = c^2/z_0$, implicando em $V = (abc)^2/(6x_0y_0z_0)$. Devemos encontrar V mínimo com a restrição que o ponto (x_0, y_0, z_0) pertença ao elipsóide,* i.e., *devemos encontrar o mínimo de $V = (abc)^2/(6x_0y_0z_0)$ com a condição $g(x_0, y_0, z_0) = x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 + z_0^2/c^2 - 1 = 0$. As equações dos vínculos de Lagrange serão*

$$-\frac{(abc)^2}{6x_0y_0z_0} = 2\lambda\frac{x_0^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y_0^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z_0^2}{c^2},$$

de onde se tem que

$$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

sendo que a equação do elipsóide foi usada. O ponto crítico, portanto, será dado por $(x_0, y_0, z_0) = (a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$.

(c) (1 Ponto) Encontre o volume mínimo.

Solução. *Substituindo-se o ponto crítico na fórmula do volume $V = (abc)^2/(6x_0y_0z_0)$, tem-se $V = abc\sqrt{3}^3/6 = abc\sqrt{3}/2$.*

3. (2 Pontos) As duas equações $F(x, y, u, v) = 0$ e $G(x, y, u, v) = 0$ determinam x e y implicitamente como funções de u e de v. Denote por $x = X(u, v)$ e $y = Y(u, v)$. Mostre que:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

nos pontos em que o jacobiano $\partial(F, G)/\partial(x, y) \neq 0$.

Solução. *Usando-se a regra da cadeia, tem-se:*

$$\frac{\partial}{\partial u}F(X(u,v), Y(u,v), u, v) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial u}G(X(u,v), Y(u,v), u, v) = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

Trata-se de um sistema linear

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial u} \end{pmatrix},$$

cuja solução, pela regra de Cramer, por exemplo, leva ao resultado diretamente.