Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 4 - MA 211 - Cursão, turma __, 23 de outubro de 2009.

Boa prova!

1. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial suave, sendo $\mathbb{R}^n_* = \{\mathbb{R}^n - \mathbf{0}\}$. O campo é dito central se for da forma $\vec{F}(X) = g(||\vec{X}||)\vec{X}$, sendo $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$, $\vec{X}$ o vetor ligando a origem ao ponto X (*i.e.*, $\vec{X} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + \cdots + x_n\hat{e}_n$), $||\vec{X}||$ a norma euclidiana de $\vec{X}$ ($||\vec{X}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$) e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave.

   (a) (4 Pontos) Mostre que todo campo central é conservativo, *i.e.*, todo campo central é um gradiente de um certo pontencial $\varphi : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$.
   Solução. *Seja a função $\varphi(||\vec{X}||)$. Usando-se a regra da cadeia, pode-se calcular seu gradiente*

   $$\nabla\varphi = \frac{\varphi'(||\vec{X}||)}{||\vec{X}||}\vec{X}.$$

   Comparando-se com a definição do campo central, basta escolher o potencial obedecendo $\varphi'(u) = ug(u)$, i.e., *$\varphi(u) = \int^u sg(s)\,ds$.*

   (b) (2 Pontos) Determine o potencial para o caso $g(u) = u^m$, $m \in \mathbb{Z}$.
   Solução. *$\varphi(u) = \int^u s^{m+1}\,ds = \frac{u^{m+2}}{m+2}$ para $m \neq -2$. Para $n = -2$, temos $\varphi(u) = \int^u s^{-1}\,ds = \log u$.*

   (c) (2 Pontos) Calcule a integral de linha

   $$I_\Gamma = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

   para o caso de um campo central $\vec{F} : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}^n$ com potencial $\varphi(\vec{X}) = \log||\vec{X}||$, sendo Γ o segmento de reta conectando os pontos A e B, pertencentes, respectivamente, às superfícies de duas (hiper)esferas centradas na origem e de raios r_A e r_B. (Admita que o segmento $\overline{AB}$ **não passa** pela origem.)
   Solução. *Como o campo é um gradiente*

   $$I_\Gamma = \int_\Gamma \nabla\varphi \cdot d\vec{s} = \varphi_B - \varphi_A = \log\frac{r_B}{r_A}.$$

   (d) (2 Pontos) De um exemplo de um campo vetorial central suave em duas dimensões tal que:

      i. $\vec{F} \neq 0$;

      ii. seja atrativo ($g < 0$);

iii. satisfaça

$$\lim_{||\vec{X}||\to\infty} \vec{F} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{||\vec{X}||\to 0} \vec{F} = 0.$$

(Possível) Solução.

$$\vec{F} = -\frac{x}{x^2+y^2+1}\hat{\imath} - \frac{y}{x^2+y^2+1}\hat{\jmath}$$