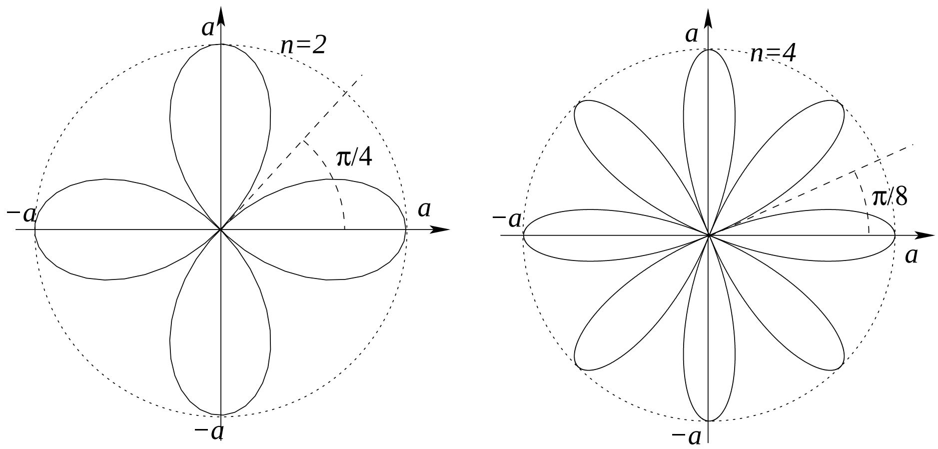
Nome: ______________________________________ RA: ________________________

Teste 5 - MA 211 - Cursão, turma __, 13 de novembro de 2009.

Boa prova!

1. (Bonus natalino adiantado: 1 Ponto ☺) Derive a função $f(x) = \cos(nx)\sin(nx) + nx$.
   Solução.
$$f'(x) = -n\sin^2(nx) + n\cos^2(x) + n = n(1 - \sin^2(nx) + \cos^2(nx)) = 2n\cos^2(nx).$$

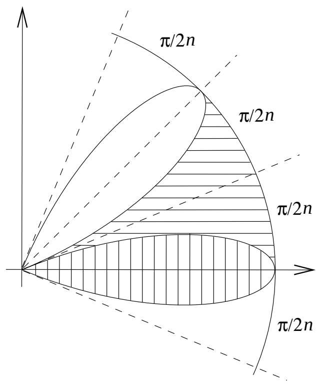
2. (5 Pontos) Para n par, a curva dada em coordenadas polares (r, θ) por $r = a\cos n\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi)$, corresponde a uma rosácea de $2n$ pétalas. Vejam abaixo um exemplo de 4 pétalas



($n = 2$) e um de 8 ($n = 4$). (Adotamos, neste caso, a convenção $(r, \theta) \to (-r, \theta \pm \pi)$ se $r < 0$, com os sinais + e −, correspondendo, respectivamente, aos casos $0 \le \theta < \pi$ e $\pi \le \theta < 2\pi$.) Mostre que a área da região englobada por uma rosácea de $2n$ pétalas, com n par, não depende de n e é exatamente igual à metade da área do círculo em que esta inscrita (círculo de raio a). (Dica: calcule a área da rosácea em coordenadas polares).

Solução. *Seja D a região correspondente ao interior da pétala correspondente a $\theta \in [-\pi/2n, \pi/2n]$. Temos*
$$A = \int_D da = \iint_D dxdy = \iint_D rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \left(\int_0^{a\cos n\theta} rdr \right) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos^2(n\theta)\, d\theta.$$
A última integral sai facilmente do bonus natalino! Finalmente, tem-se $A = \frac{\pi a^2}{4n}$. Como são $2n$ pétalas, a área total será $\pi a^2/2$.

Outra solução, sem usar o bonus natalino. *Vejam a figura abaixo. A afirmação do enunciado é equivalente a dizer que as áreas hachuradas são iguais para qualquer rosácea com n par (mostre!). Isso pode ser demonstrado calculando-se ambas as áreas em coordenadas polares, mas esta margem é muito pequena para exibir os cálculos. Sugestão: pensem também no caso em que n é ímpar...*



3. (4 Pontos) Use o teorema de Green para calcular a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solução. *O teorema de Green nos diz que*

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Escolhendo-se $Q = x$ e $P = 0$, temos que I corresponderá a área da região interna de D. Para o caso da elipse, basta escolher D como sendo a região interior a curva $x = a\cos(t)$ e $y = b\sin(t)$, com $t \in [0, 2\pi)$. Como $dy = b\cos(t)dt$, teremos

$$I = \oint_{\partial D} xdy = ab \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = ab\pi,$$

como conseqüência, uma vez mais, do bonus natalino!