Nome: ______________________________ RA: ____________________

Prova 1 - MA 211 - Cursão, turma __ , 9 de outubro de 2009.

Todas as respostas devem estar justificadas. Boa prova!

1. Sejam as funções suaves $f(u,v,x,y) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $X(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $Y(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Considere a função $g(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,v) = f(u,v,X(u,v),Y(u,v))$. Determine, em termos das derivadas parciais de f, X e Y,

   (a) (0.5 Ponto) a derivada direcional de g na direção de u,

   Solução. *Regra da cadeia:*
$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial u}$$

   (b) (0.5 Ponto) a derivada de g em relação a u, com $X(u,v)$ mantida constante $= X_0$ (admita $\frac{\partial X}{\partial v} \neq 0$),

   Solução. *A condição $X(u,v)$ constante define uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^2$. Como $\frac{\partial X}{\partial v} \neq 0$ por hipótese, podemos parametrizar esta hipersuperfície usando-se u como parâmetro:*
$$X(u,v(u)) = X_0 = \text{ constante} \Rightarrow \frac{dX}{du} = 0 = \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial X}{\partial u}}{\frac{\partial X}{\partial v}}$$

   A derivada em questão será
$$\begin{aligned} \frac{d}{du} f(u,v(u),X_0,Y(u,v(u))) &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial u} - \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\frac{\partial X}{\partial u}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^{-1} \end{aligned}$$

   (c) (0.5 Ponto) a derivada direcional de g ao longo da curva $Y(u,v) = Y_0 =$ constante.

   Solução. *A curva $Y(u,v) = Y_0 =$ constante é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^2$. Seu vetor normal é $\vec{N} = \nabla Y = \frac{\partial Y}{\partial u}\hat{\imath} + \frac{\partial Y}{\partial v}\hat{\jmath}$. Seu vetor tangente $\vec{V}$ é tal que $\vec{V}\cdot\vec{N} = 0$, i.e., $\vec{V} = \frac{\partial Y}{\partial v}\hat{\imath} - \frac{\partial Y}{\partial u}\hat{\jmath}$. A derivada em questão será*
$$\begin{aligned} g'_{\vec{V}} = \frac{1}{|\vec{V}|}\vec{V}\cdot\nabla g &= \frac{1}{|\vec{V}|}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial u}\right)\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{1}{|\vec{V}|}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\frac{\partial Y}{\partial u} \\ &= \left[\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right)\right]\left(\sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2}\right)^{-1} \end{aligned}$$

   (d) (1.0 Ponto) Sob que condições seria possível definir-se uma derivada de g com $X(u,v)$ e $Y(u,v)$ mantidas constantes? Justifique.

   Solução. *A única possibilidade é que $X(u,v)$ e $Y(u,v)$ sejam funcionalmente dependentes e as hipersuperfícies $X(u,v) =$ constante e $Y(u,v) =$ constante coincidam. Caso contrário, o local geométrico correspondente a intersecção das hipersuperfícies $X(u,v) =$ constante e $Y(u,v) =$ constante terá dimensão zero (será um conjunto de pontos isolados ou será vazio) e não teremos nenhuma "direção" disponível para calcular a derivada.*

2. (2 Pontos) Prove a afirmação abaixo se ela for verdadeira, ou apresente um contra-exemplo caso ela seja falsa.

> "Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ será *diferenciável* em um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ se ela for *contínua* em uma vizinhança de P e tiver *todas* as derivadas direcionais no ponto P *contínuas.*"

Solução. *Falso. Tome, por exemplo, a função $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \le 0 \text{ ou } y \ge x^2, \\ y(x^2 - y) & \text{se } 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Está função é contínua em uma vizinhança da origem, tem todas as derivadas direcionais na origem nulas, mas tem as derivadas parciais descontínuas ao longo da reta $y = 0$ e da parábola $y = x^2$, $\therefore$ não é diferenciável em torno da origem.

3. (1.5 Pontos) Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita homogênea de grau n se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tivermos

$$f(\alpha \mathbf{x}) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^n f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha^n f(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Mostre que, para toda função f homogênea de grau n, temos

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = n f(\mathbf{x}).$$

(Dica: derive (1) em relação a α.)

Solução. *Derivando-se ambos os lados de (1) em relação a α, tem-se*

$$\frac{d}{d\alpha} f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = n\alpha^{n-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Basta tomar $\alpha = 1$ e o resultado segue diretamente.

4. (2 Pontos) Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ duas hipersuperfícies suaves de $\mathbb{R}^n$ definidas, respectivamente, por $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ e $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, sendo $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Define-se a distância entre $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ como $\text{dist}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \min \text{dist}(P, Q)$, sendo P um ponto de $\mathcal{G}$ e Q um ponto de $\mathcal{H}$. Suponha que esta distância exista e que seja realizada pelos pontos P_0 e Q_0. Mostre que a reta que passa por P_0 e Q_0 intercepta *perpendicularmente* as superfícies $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

Solução. *Semelhante a proposta pelo Jamil no forum.*

5. (2 Pontos) Um professor deve escolher um critério para se calcular uma "média" a partir de n provas, P_1 a P_n, todas com mesmo peso e não negativas. O professor conhece a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica, definidas, respectivamente, por

$$M_{\text{A}} = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}, \quad M_{\text{G}} = \sqrt[n]{P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n}, \quad M_{\text{H}} = \frac{n}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \cdots + \frac{1}{P_n}}.$$

Mostre que $M_\mathrm{H} \leq M_\mathrm{G} \leq M_\mathrm{A}$ e que a igualdade só ocorre no caso em que $P_1 = P_2 = \cdots = P_n$. Conclusão: as coisas poderiam ser pior! O professor é um cara legal...☺
(Dica: Determine o máximo de M_G com M_A fixo e o máximo de M_H com M_G fixo.) **Solução**.
Parte 1: Mostrar que $M_\mathrm{G} \leq M_\mathrm{A}$. Considere o problema de encontrar extremos da função $M_\mathrm{G}(P_1, P_2, \ldots P_n)$ com $M_\mathrm{A}(P_1, P_2, \ldots P_n)$ fixo. Introduzindo um multiplicador de Lagrange, temos que os pontos extremos são tais que $\nabla M_\mathrm{G} = \lambda \nabla M_\mathrm{A}$. Explicitamente, temos

$$\frac{\partial}{\partial P_i} M_\mathrm{G}(P_1, P_2, \ldots P_n) = \frac{1}{n} P_i^{-1} M_\mathrm{G}(P_1, P_2, \ldots P_n) = \lambda \frac{\partial}{\partial P_i} M_\mathrm{A}(P_1, P_2, \ldots P_n) = \frac{\lambda}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

de onde se tem que, nos pontos extremos, $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = M_\mathrm{G}(P_1, P_2, \ldots P_n)/\lambda$