Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 1 - MA 211 - Cursão, turma __, 28 de agosto de 2009.

Boa prova!

1. (2.5 Pontos) Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(X) = ||X||^4,$$

com $X \in \mathbb{R}^n$ e $||X||$ sendo a norma Euclidiana de X. Calcule a derivada direcional de $f(X)$ em uma direção arbitrária $V \in \mathbb{R}^n$.

Solução 1. *Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^n$. Note que*

$$f(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2, \text{e que} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times 2x_i = 4||X||^2 x_i,$$

de onde tem-se que $\nabla f = 4||X||^2 (x_1\hat{e}_1 + x_1\hat{e}_1 + \cdots x_n\hat{e}_n) = 4||X||^2 X$, implicando que a derivada direcional $f'_V(X)$ é dada por

$$f'_V(X) = V \cdot \nabla f = 4||X||^2 (V \cdot X).$$

Solução 2. *A derivada direcional é, por definição,*

$$f'_V(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+hV) - f(X)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{||X+hV||^4 - ||X||^4}{h}. \tag{1}$$

Note, porem, que $||X+hV||^2 = (X+hV)\cdot(X+hV) = ||X||^2 + 2h(V\cdot X) + h^2||V||^2$, de onde obtem-se

$$||X+hV||^4 = (||X||^2 + 2h(V\cdot X) + h^2||V||^2)^2 = ||X||^4 + 4||X||^2 h(V\cdot X) + h^2(\cdots) + h^3(\cdots) + h^4(\cdots)$$

Substituindo-se em (1) tem-se, finalmente, $f'_V(X) = 4||X||^2(V\cdot X)$.

2. (2.5 Pontos) Considere o campo vetorial $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $V = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, sendo (x, y, z) e $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, respectivamente, as coordenadas e versores canônicos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$\nabla\left(||V||^m\right) = m||V||^{m-2}V,$$

para todo m inteiro (positivo, negativo ou zero).

Solução. *Note que $||V||^m = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{m}{2}}$, de onde*

$$\frac{\partial}{\partial x}||V||^m = \frac{m}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{m}{2}-1} \times 2x = mx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{m-2}{2}} = mx||V||^{m-2},$$

para qualquer m inteiro. Para as direções y e z, o cálculo é análogo, implicando em

$$\nabla\left(||V||^m\right) = m||V||^{m-2}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = m||V||^{m-2}V.$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \text{ ou } y \geq 2x^2, \\ 1 & \text{se } 0 < y < 2x^2. \end{cases}$$

(a) (2.5 Pontos) Mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

ao longo de qualquer reta que passe pela origem.

Solução. *Considere a parábola $y = 2x^2$. A função $f(x,y)$ é nula em toda região acima da parábola (ela incluída) e no semiplano $y \leq 0$. Qualquer reta que passa pela origem está contida, em uma vizinhança da origem, nessa região. (Mostre! Dica: faça o gráfico da parábola e da reta e considere suas derivadas na origem.)*

(b) (2.5 Pontos) A função f é contínua na origem? Justifique.

Solução. *A função* **não** *é contínua. Há pontos arbitrariamente próximos da origem (acima da reta $y = 0$ e abaixo da parábola) para os quais $f(x,y) = 1$. Portanto escolhendo-se, por exemplo, um ε pequeno, não há nenhuma vizinhança da origem $x^2 + y^2 < \delta$ para a qual $|f(x,y)| < \varepsilon$ para todos os pontos dessa vizinhança.*