Nome: ______________________________________ RA: ______________________

Exame Final - MA 211 - Cursão, turma __ , 18 de dezembro de 2009.

Atenção: O exame consiste em 6 questões, todas valendo 2 pontos. Sua nota final será a soma dos pontos obtidos nas suas 5 melhores questões. Todas as respostas devem estar justificadas. Boa prova!

Questão 1. Considere as afirmações abaixo. Classifique-as como verdadeiras ou falsas. Prove as verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas.

1. Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável invertível, então sua derivada total no ponto a, $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é uma transformação linear invertível.

   Solução. *Falso. Contra-exemplo:* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) = x^3$. *É diferenciável* ($T_a = 3x_a^2$), *invertível* ($F^{-1} = \sqrt[3]{y}$), *mas* T_a *não é invertível na origem.*

2. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função escalar suave com curvas de nível conhecidas e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A função $h = g \circ f$ sempre terá as mesmas curvas de nível que a função f.

   Solução. *Falso. Não basta* g *diferenciável, ela deve ser invertível. Contra-exemplo:* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = x^2 + y^2$. *Suas curvas de nível são círculos concêntricos na origem. Escolhendo* $g(x) = 1$ *(diferenciável), temos* $h(x, y) = 1$, *que não possui curvas de nível. (Sua única "curva" de nível é o plano inteiro para* $h = 1$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar suave. A (hiper)superfície de nível de f que passa pelo ponto P é ortogonal a ∇f nesse mesmo ponto.

   Solução. *Verdadeiro. Se* $\mathcal{H}$ *é uma hipersuperfície de nível, então*

   $$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c = \text{ constante.}\}$$

   Considere uma curva genérica suave Γ *contida em* $\mathcal{H}$, $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, *dada por* $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. *Note que*

   $$\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \vec{V} \cdot \nabla f = 0,$$

   sendo $\vec{V}$ *o vetor tangente a curva* Γ, *i.e.,* $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \hat{e}_i$. *Como a curva é genérica, segue facilmente que o plano tangente é ortogonal a* ∇f.

4. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial suave. Se $\vec{F} \cdot \partial_i \vec{F} = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então $||\vec{F}||$ é constante.

   Solução. *Verdadeiro. O campo vetorial genérico tem a seguinte forma:*

   $$\vec{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \hat{e}_j.$$

A condição $\vec{F} \cdot \partial_i \vec{F} = 0$ implica em

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0.$$

Note, porem, que

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} ||\vec{F}||^2 = 0,$$

implicando que, de fato, $||\vec{F}||$ é constante. Note que o contrário também é verdadeiro: $||\vec{F}||$ constante implica em $\vec{F} \cdot \partial_i \vec{F} = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Um erro muito comum foi admitir que $\vec{F} \cdot \partial_i \vec{F} = 0$ implicaria em $\partial_i \vec{F} = 0$. Pensem no movimento circular uniforme. O vetor velocidade não é constante, mas seu módulo é. Em outras palavras, o vetor aceleração ($\partial_i \vec{F}$) é ortogonal ao vetor velocidade ($\vec{F}$).

Questão 2. Mostre que o triângulo de maior área inscrito em uma circunferência é equilátero.

Solução com multiplicadores de Lagrange. *Sem perda de generalidade, admitamos que a circunferência tem raio 1 e está centrada na origem, que o vértice A está no ponto $(-1, 0)$, e que os vértices B e C, de coordenadas (x_b, y_b) e (x_c, y_c), respectivamente, estão dispostos de forma que C esteja "acima", no sentido anti-horário, de B. A área do triângulo em questão será*

$$A = \frac{1}{2} \left|\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|\right| = \frac{1}{2} \left(x_b y_c - x_c y_b + y_c - y_b \right).$$

Os vínculos pertinentes são $V_b(x_b, y_b) = x_b^2 + y_b^2 = 1$ e $V_c(x_c, y_c) = x_c^2 + y_c^2 = 1$. Note que $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. As variáveis pertinentes são (x_b, y_b, x_c, y_c). A condição de extremo de A com relação aos vínculos $V_b(x_b, y_b)$ e $V_c(x_c, y_c)$ será

$$\nabla A = \lambda_b \nabla V_b + \lambda_c \nabla V_c,$$

sendo que o operador ∇ opera sobre as variáveis (x_b, y_b, x_c, y_c). Estas condições são equivalentes às seguintes equações

$$\begin{aligned} y_c &= 4\lambda_b x_b \\ -(x_c + 1) &= 4\lambda_b y_b \\ -y_b &= 4\lambda_c x_c \\ x_b + 1 &= 4\lambda_c y_c \end{aligned}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os lados das equações 1 e 2, somando-se e usando-se os vínculos, temos:

$$16\lambda_b^2 = 2(x_c + 1)$$

De maneira análoga, obtemos para as duas últimas equações:

$$16\lambda_c^2 = 2(x_b + 1)$$

Multiplicando-se a primeira por y_b, a terceira por y_c e somando-se, obtemos

$$\lambda_b x_b y_b + \lambda_c x_c y_c = 0.$$

Multiplicando-se agora a segunda por x_b, a quarta por x_c e somando-se, obtemos

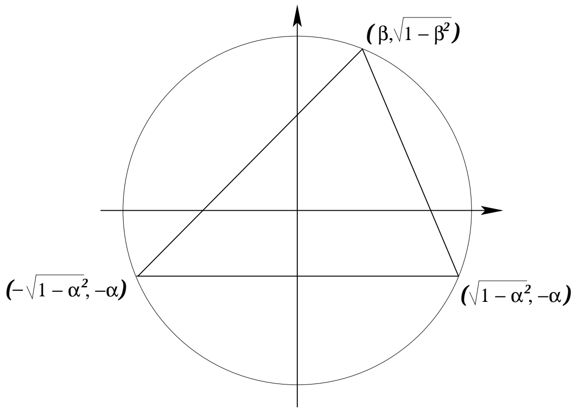
$$\lambda_b x_b y_b + \lambda_c x_c y_c = \frac{x_c - x_b}{4},$$

de onde concluímos que $x_c = x_b$, o que implica em $\lambda_c = \lambda_b$ e $y_c = -y_b$. (A possibilidade $\lambda_c = -\lambda_b$ é excluída porque implicaria em $B = C$.). As equações finalmente se reduzem a

$$\begin{aligned} -y_b &= \sqrt{2}x_b\sqrt{x_b+1} \\ -(x_b+1) &= \sqrt{2}y_b\sqrt{x_b+1} \end{aligned}$$

que tem como solução $x_b = 1/2$ e $y_b = -\sqrt{3}/2$, que corresponde a um triângulo equilátero.

Solução da quinta série. *Sem perda de generalidade, o triângulo pode ser parametrizado como na figura abaixo:*



A área A é dada por $\frac{bh}{2}$, sendo $b = 2\sqrt{1-\alpha^2}$ e $h = \sqrt{1-\beta^2} + \alpha$. Temos, portanto

$$A(\alpha, \beta) = \left(\alpha + \sqrt{1-\beta^2}\right)\sqrt{1-\alpha^2}.$$

As condições de extremo são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= \sqrt{1-\alpha^2} - \alpha\frac{\left(\alpha + \sqrt{1-\beta^2}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \beta} &= -\beta\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \end{aligned}$$

de onde se tem $\beta = 0$ e $\alpha = 1/2$, que corresponde a um triângulo equilátero.

Questão 3. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola e $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial conservativo derivado de um potencial ϕ. Mostre que, se ϕ é constante em ∂B e $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ em B, então $\vec{F} = 0$ em B.

Solução. *A condição $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ implica que ϕ é harmônico, $\nabla^2\phi = 0$. Considere a identidade*

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = |\nabla\phi|^2 + \phi\nabla^2\phi.$$

Integrando-se no volume de B ambos os lados, usando-se o teorema do divergente e a condição de ϕ harmônico tem-se

$$\oiint_{\partial B} \phi\nabla\phi \cdot d\vec{a} = \iiint_B |\nabla\phi|^2 \, d\text{vol}.$$

Se ϕ é constante sobre ∂B, temos que

$$\oiint_{\partial B} \phi\nabla\phi \cdot d\vec{a} = \phi_0 \oiint_{\partial B} \nabla\phi \cdot d\vec{a} = \phi_0 \iiint_B \nabla^2\phi \, d\text{vol} = 0$$

sendo ϕ_0 o valor de ϕ sobre ∂B. O teorema do divergente foi usado no último passo. Esta condição implica, pela expressão anterior, que $\nabla\phi = \vec{F} = 0$ em B.

Um erro muito comum nesta questão foi admitir que ϕ constante em ∂B implicaria $\nabla\phi = 0$ em ∂B. Isto é FALSO. A implicação correta é $\nabla\phi$ ORTOGONAL a ∂B (pensem como uma curva de nível).

Um campo elétrico estático (eletrostático), no vácuo, é um campo conservativo de divergência nula. Condutores são materiais que tem uma propriedade interessante: sua superfície são sempre EQUIPOTENCIAIS elétricos, i.e., o campo elétrico é constante sobre elas. Este exercício demonstra um fato muito bem conhecido na eletrostática: o campo elétrico no interior de uma cavidade (não necessariamente esférica) condutora vazia é sempre nulo. Vejam uma discussão interessante nas Feynman Lectures, Vol 2., seção 5.10.

Questão 4. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície suave fechada (compacta) e Γ uma curva de Jordan no plano $z = 0$. De exemplos de campos vetoriais suaves $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que:

1. $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} =$ volume englobado pela superfície S.

   Solução. *Qualquer campo com divergente unitário. Exemplo: $\vec{F} = x\hat{\imath}$.*

2. $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} =$ área do plano $z = 0$ delimitada pela curva Γ.

   Solução. *Qualquer campo $\vec{F}$ com rotacional $\nabla \times \vec{F} = \hat{k}$. Exemplo: $\vec{F} = x\hat{\jmath}$.*

Questão 5. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ os dois cilindros sólidos ortogonais de raio r dados, respectivamente, pelas equações $x^2 + y^2 \leq r^2$ e $x^2 + z^2 \leq r^2$. Calcule o volume do sólido correspondente à intersecção dos cilindros $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)$.

Solução. *A intersecção ortogonal de dois cilindros de mesmo raio é o chamado sólido de Steinmetz. Procurem esse nome na Wikipedia, há referências interessantes (no site* `http://mathworld.wolfram.com` *há uma figura interativa interessante do sólido.). Notem que a intersecção deste sólido com os planos $x =$ constantes são QUADRADOS de aresta $a = \sqrt{r^2 - x^2}$. Muita gente concluiu que a intersecção seria uma esfera, um elipsóide, um cilindro e outras coisas, algumas bastante bizarras. O sólido corresponde a região dada por $-r \leq x \leq r$, $-\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$ e $-\sqrt{r^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2}$. O volume será*

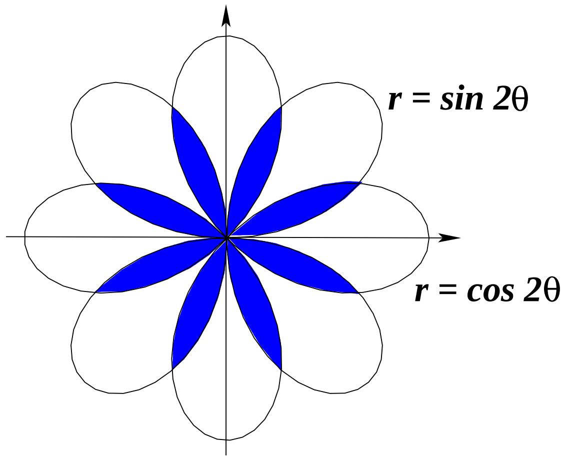
$$V = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dzdydx = 4 \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \frac{16}{3} r^3.$$

Questão 6. Sejam $\mathcal{R}_c$ e $\mathcal{R}_s$ as regiões do plano $\mathbb{R}^2$ englobadas pelas pétalas das rosáceas dadas em coordenadas polares por, respectivamente, $r = \cos 2\theta$ e $r = \sin 2\theta$. Calcule a área da região correspondente a $\mathcal{R}_c \cap \mathcal{R}_s$ (área destacada na figura abaixo).

Solução. *Notem que a área de cada pétala é dado por $2I$, sendo*

$$I = \int_0^{\pi/8} \int_0^{\sin 2\theta} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Como são 8 pétalas, a área total será $16I = \pi/2 - 1$.


r = sin 2θ
r = cos 2θ