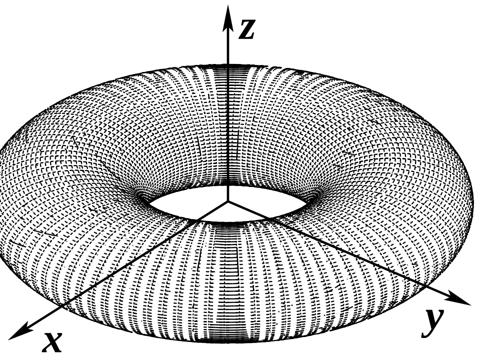
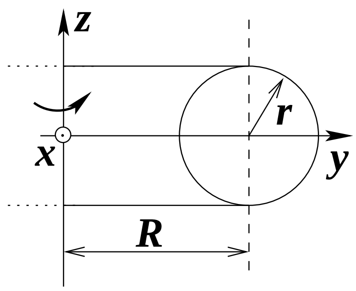
Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 6 - MA 211 - Cursão, turma __, 27 de novembro de 2009.

Boa prova!

1. Considere o toro T de raio menor r e raio maior R, conforme figura abaixo, sendo $R > r$.





(a) (1 Ponto) Mostre que T pode ser parametrizado como $T : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, sendo

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

Solução. *Do diagrama da direita, usando-se coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z), tem-se $z = r\sin\theta$ e $\rho = R + r\cos\theta$, sendo θ o ângulo entre $\vec{r}$ e a linha radial. Escrevendo-se em coordenadas cartesianas, obtemos a parametrização desejada.*

(b) (2 Ponto) Determine, como função dos parâmetros θ e ϕ, o elemento de área orientado $d\vec{a}$ sobre T.

Solução. *O elemento orientado, apontando para fora do toro, será $d\vec{a} = (\vec{Q}_\phi \times \vec{Q}_\theta)d\phi d\theta$. Temos*
$\vec{Q}_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\hat{k} = -(R + r\cos\theta)(\sin\phi\hat{\imath} - \cos\phi\hat{\jmath})$ *e*
$\vec{Q}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\hat{k} = -r\sin\theta(\cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{\jmath}) + r\cos\theta\hat{k}$. *Notem que*
$(\sin\phi\hat{\imath} - \cos\phi\hat{\jmath}) \times (\cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{\jmath}) = \hat{k}$ *e que*
$(\sin\phi\hat{\imath} - \cos\phi\hat{\jmath}) \times \hat{k} = -(\cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{\jmath})$. *Tem-se, portanto,*

$$d\vec{a} = (R + r\cos\theta)\left[r\cos\theta(\cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{\jmath}) + r\sin\theta\hat{k}\right] d\phi d\theta.$$

(c) (3 Pontos) Calcule a área superficial de T.

Solução. *Basta calcular*

$$\oiint_T |d\vec{a}| = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,(R + r\cos\theta)\; d\phi d\theta = 4\pi^2 Rr.$$

(d) (3 Pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + \alpha\hat{k}$, sendo α uma constante. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ sobre T, *i.e.*, calcule

$$\Phi = \oiint_T \vec{F} \cdot d\vec{a}.$$

Solução. *Notem que*

$$\vec{F} \cdot d\vec{a} = \left[(R + r\cos\theta)^2 r\cos\theta + \alpha(R + r\cos\theta)\sin\theta\right] d\phi d\theta.$$

O fluxo será, portanto,

$$\Phi = 2\pi \int_0^{2\pi} \left[(R + r\cos\theta)^2 r\cos\theta + \alpha(R + r\cos\theta)\sin\theta\right] d\theta = 4\pi R r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = 4\pi^2 R r^2.$$

(e) (1 Ponto) Dê uma argumento que explique por que o valor do fluxo Φ do item anterior não depende de α.

Possível solução: *A contribuição da componente* $\alpha\hat{k}$ *no fluxo será nula, pois o toro é simétrico por reflexão no plano* $z = 0$ *(mostre!).*