Nome: ____ RA: ________________________

Prova 2 - MA 211 - Cursão, turma __ , 11 de dezembro de 2009.

Todas as respostas devem estar justificadas. Boa prova!

1. (2 Pontos) Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola, e seja $\vec{n}$ o vetor normal unitário definido em ∂B. Sejam $\vec{F}$ e $\vec{G}$ campos vetoriais suaves tais que $\text{rot}\,\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$ e $\text{div}\,\vec{F} = \text{div}\,\vec{G}$ em B, e, além disso, $\vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{G} \cdot \vec{n}$ em ∂B. Mostre que $\vec{F} = \vec{G}$.

   Solução. *Trata-se do exercício 11 do grupo 12.21 do livro. Seja $\vec{H} = \vec{F} - \vec{G}$. Temos $\text{rot}\,\vec{H} = 0$, $\text{div}\,\vec{H} = 0$ e $\vec{H} \cdot \vec{n} = 0$. Como $\text{rot}\,\vec{H} = 0$, temos $\vec{H} = \nabla\phi$ em B. Além disso, ϕ é harmônico: $\nabla^2\phi = 0$. Considere a identidade*

   $$\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = |\nabla\phi|^2 + \phi\nabla^2\phi.$$

   Integrando-se no volume de B ambos os lados, usando-se o teorema do divergente e a condição de ϕ harmônico tem-se

   $$\oiint_{\partial B} \phi\nabla\phi \cdot d\vec{a} = \iiint_B |\nabla\phi|^2 \, d\text{vol}.$$

   Porém, $\nabla\phi \cdot d\vec{a} = \vec{H} \cdot \vec{n}\, da = 0$, que implica $\nabla\phi = 0$, e portanto ϕ constante em B, garantindo que $\vec{H} = 0$.

2. (2 Pontos) Diz-se que um campo vetorial $\vec{F}$ suave em $\mathbb{R}^3$ possui vorticidade em um dado ponto se, neste ponto, $\vec{V} = \nabla \times \vec{F} \neq 0$. A direção da vorticidade é definida como horária ou anti-horária da maneira usual, de acordo com a direção de $\vec{V}$. Mostre que não existe nenhum campo vetorial suave $\vec{F}$ tangente à superfície de uma esfera que exiba vorticidade de apenas um tipo (horária ou anti-horária).

   Solução. *Do teorema de Stokes, temos*

   $$\oiint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{a} = 0,$$

   já que a esfera S não tem borda. Como $\vec{F}$ é tangente a esfera, $\nabla \times \vec{F}$ é paralelo a $d\vec{a}$. Se $\vec{F}$ tiver vorticidade do tipo anti-horária, por exemplo, temos que $\left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{a} \geq 0$ sobre S, e é impossível obedecer o teorema de Stokes. Idem para o caso horário. Em outras palavras, se houver alguma região com vorticidade de um tipo, necessariamente deve haver outra com vorticidade inversa. Para cada "furacão", há um "anti-furacão"! Para ler sobre um interessantíssimo super-furacão e seus pequenos "anti-furacões" necessários para não violarmos o teorema de Stokes sobre a esfera, procure referências sobre a grande mancha de Júpiter. (Jupiter spot).

3. Seja C uma curva de Jordan suave com vetor normal unitário exterior $\vec{n}$, limitando uma região D no plano.

   (a) (1 Ponto) *Mini-Teorema da Divergência.* Se $\vec{F}$ é um campo vetorial suave no plano, mostre que

   $$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_D \text{div}\,\vec{F}\, dxdy,$$

sendo que s denota comprimento de arco. (Dica: Use o Teorema de Green.)

Solução. *Para um campo $\vec{G} = Q\vec{i} - P\vec{j}$, vale que $\oint_C \vec{G} \cdot \vec{n}\, ds = \oint_C P dx + Q dy$. Logo*

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds &= \oint_C -Q dx + P dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy,\end{aligned}$$

a segunda igualdade pelo Teorema de Green.

(b) (1 Ponto) Mostre que, para todo k,

$$\oint_C \nabla(r^k) \cdot \vec{n}\, ds \geq 0,$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução. *Como $\nabla(r^k) = kr^{k-2}\vec{r}$ e $\operatorname{div}(r^{k-2}\vec{r}) = kr^{k-2}$, segue do item (a) que*

$$\begin{aligned}\oint_C \nabla(r^k) \cdot \vec{n}\, ds &= k \iint_D \operatorname{div}(r^{k-2}\vec{r})\, dx dy \\ &= k^2 \underbrace{\iint_D r^{k-2}\, dx dy}_{\geq 0},\end{aligned}$$

pois r^{k-2} é uma função contínua ≥ 0.

(c) (1 Ponto) Interprete fisicamente a integral do item (b) acima, no caso $k = 4$, em termos dos momentos de inércia de D em torno dos eixos x e y.

Solução. *Segue da solução do item (b) acima que*

$$\begin{aligned}\oint_C \nabla(r^4) \cdot \vec{n}\, ds &= 16 \iint_D r^2\, dx dy \\ &= 16 \iint_D (x^2 + y^2)\, dx dy \\ &= 16(I_x + I_y).\end{aligned}$$

4. (1 Ponto) Seja $\vec{A}$ um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^3$ com componente apenas na direção z, *i.e.*, $\vec{A} = f(x, y, z)\hat{k}$. Mostre que

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot d\vec{a} = 0$$

para qualquer superfície suave S com fronteira inteiramente contida no plano $z = \alpha$.

Solução. *Pelo teorema de Stokes*

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial S} A \cdot d\vec{s}.$$

Porém, $A \cdot d\vec{s} = \left(\hat{k} \cdot d\vec{s} \right) f$ para o caso em questão. Como a curva ∂S está contida no plano $z = \alpha$, seu vetor tangente $d\vec{s}$ será, necessariamente, ortogonal a $\hat{k}$.

5. A loxodromia, ou Curva de Rumo, é uma curva relevante na navegação. Trata-se da trajetória de um corpo (uma nau, por exemplo) que se move sobre a superfície de uma esfera de raio R realizando um ângulo α constante com os meridianos da esfera. Sabe-se que, se $\alpha \neq \pi/2$, a curva completa **sempre** sai de um polo da esfera e alcança o outro, veja figura abaixo.

(a) (1 Ponto) A loxodromia correspondente a $\alpha = \pi/2$ é uma curva fechada. Identifique-a e calcule seu comprimento.

Solução. *Neste caso, a loxodromia coincide com uma "latitude" correspondente a $\theta = \theta_0$ constante. Seu comprimento será $2\pi R \sin\theta_0$.*

(b) (1 Ponto) Mostre que, para $\alpha \neq \pi/2$, o comprimento da loxodromia é dado por $\pi R/\cos\alpha$.

Solução. *Admitamos que a esfera está parametrizada da maneira usual (coordenadas esféricas). Uma curva qualquer $\Gamma : \mathbb{R} \to S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ restrita a superfície da esfera tem vetor tangente dado por*

$$\vec{V} = R\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\right)\hat{\imath} + R\left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\right)\hat{\jmath} - R\dot{\theta}\sin\theta\hat{k}.$$

O comprimento de qualquer curva entre os pontos A e B será dado por

$$\int_A^B |\vec{V}|\, dt.$$

O versor tangente aos meridianos ϕ constante da esfera é dado por $\hat{v}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\hat{\jmath} - \sin\theta\hat{k}$. A condição de loxodromia é $\vec{V}\cdot\hat{v}_\theta = |\vec{V}|\cos\alpha$. Porém, temos $\vec{V}\cdot\hat{v}_\theta = R\dot{\theta}$, implicando que o comprimento da loxodromia completa será

$$\frac{R}{\cos\alpha}\int_0^\pi d\theta = \frac{\pi R}{\cos\alpha}.$$

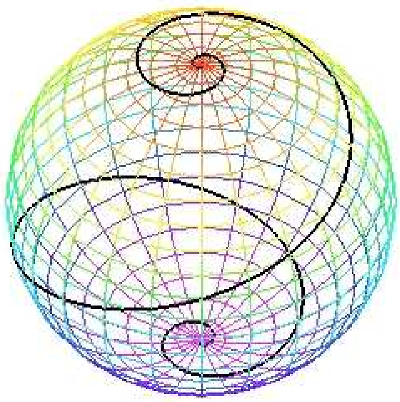

Figura 1: Uma loxodromia