Nome: ______________________________ RA: ____________________

Prova 1 - MA 311 - Cursão, 28 de abril de 2014.

Boa prova!

1. (2.5 Pontos) Determine a função $f(x)$ suave, com $x \geq 0$, tal que sua transformada de Laplace seja

$$F(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3}.$$

Solução. *Notem que*

$$\frac{s^2}{(s+1)^3} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^3} - \frac{2s+1}{(s+1)^3}$$

Como

$$\frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

temos finalmente

$$\frac{s^2}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3},$$

que corresponde à tranformada de Laplace da função

$$f(x) = e^{-x}\left(1 - 2x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Obviamente, há diversas maneiras de se chegar ao resultado. Duvido que haja algum mais simples que este... Se alguem encontra, ponha no forum. O autor será recompensado!!!!

2. (2.5 Pontos) Determine as soluções da EDO $xy' - y^3 = 0$ e esboce-as no plano (x, y).

Solução. *Trata-se de um equação separável*

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}y^{-2} = x^{-1}.$$

Integrando-se em ambos lados tem-se

$$y_0^{-2} - y^{-2}(x) = 2\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| \Rightarrow y^2(x) = \frac{y_0^2}{1 - 2y_0^2 \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|},$$

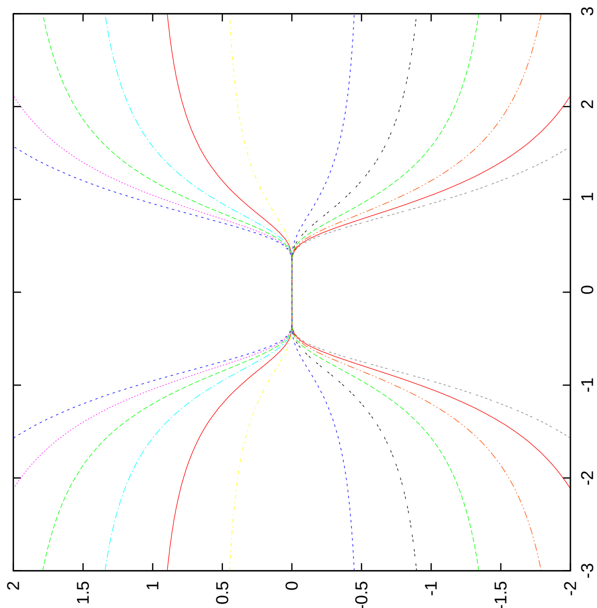
sendo $y(x_0) = y_0$. Por ser uma equação separável, ela tem um potencial trivial associado:

$$\Psi(x, y) = y^{-2} + \ln|x|$$

e portanto as soluções da equação original correspondem às curvas de nivel do potencial $\Psi(x, y)$. Observem que o potencial é invariante por reflexão nos dois eixos ($x \to -x$, $y \to -y$). Assim, basta esboçar as curvas no primeiro quadrante. A curva de nível $\Psi(x, y) = \ln c$, corresponde à solução:

$$x = ce^{-y^{-2}}$$

trata-se de uma função velha conhecida, já discutida mais de uma vez em aula. Ela se anula, assim como todas suas derivadas (em relação a y) para y=0, e tende assintoticamente (para $y \to \pm\infty$) a c. Um esboço segue na figura seguinte.



3. Considere o seguinte sistema (2×2) de equações diferencias lineares não homogêneas

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} a \cos bt \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (1 Pontos) Obtenha uma solução geral para $a = 0$.

   Solução. *Os autovalores da matriz* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *satisfazem a equação característica*

$$(2 - \lambda)^2 = 1,$$

   cuja solução é evidente: $\lambda = 1$ *ou* $\lambda = 3$. *Os autovalores associados são* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *respectivamente. A solução geral da homogênea* ($a = 0$) *será*

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

   (b) (1.5 Pontos) Obtenha a solução do sistema com $a = 1$ e $b = 2$, e com condições iniciais

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solução. *A solução geral será a solução da homogênea do item anterior mais uma da particular, que procuraremos da forma*

$$Y(t) = V_1 \cos 2t + V_2 \sin 2t,$$

sendo $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$*. Substituindo-se na equação, ficamos com*

$$-2V_1 \sin 2t + 2V_2 \cos 2t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} V_1 \cos 2t + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} V_2 \sin 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t$$

rearranjando-se os termos

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} V_1 - 2V_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cos 2t + \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} V_2 + 2V_1 \right] \sin 2t = 0.$$

Como trata-se de uma identidade para todo t*, precisamos que cada um dos termos entre colchetes se anule individualmente. Do segundo, temos*

$$V_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} V_2,$$

e do primeiro

$$\left(2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \right) V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \frac{2}{65} \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Temos, finalmente, a seguinte solução geral

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} - \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t + \frac{2}{65} \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} \sin 2t.$$

As constantes c_1 *e* c_2 *devem ser fixadas a partir da condição inicial*

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix},$$

cuja solução é $c_1 = -\frac{3}{26}$ *e* $c_2 = \frac{1}{10}$*.*

4. (8.24.18-20) Determine a função $f(x)$ (contínua) não negativa tal que a área sob seu gráfico em um intervalo arbitrário $[x_0, x_1] \in \mathbb{R}$ seja proporcional a:

   (a) (1 Ponto) $f(x_1) - f(x_0)$.

   (b) (1 Ponto) $f(x_1) + f(x_0)$.

   (c) (0.5 Ponto) $f(x_1)f(x_0)$.

   Solução. *Ver T1.*