Nome: ______________________________ RA: ____________________

Exame Final - MA 311 - Cursão, 11 de julho de 2014.

(Justifique todas suas respostas e boas férias!)

Faça apenas 4 dentre as 5 questões abaixo

1. Dá-se o nome de equação integral de Volterra para as equações da forma

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds,$$

sendo $f(t)$ e $K(t,s)$ funções conhecidas suaves e $x(t)$ a função incógnita.

(a) (1.0 Ponto) Mostre que, se $K(t,s) = K(t-s)$, a transformada de Laplace da solução $x(t)$ pode ser obtida como

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{1 - \mathcal{L}[\Theta(t-a)K(t)]}$$

Solução. *Bem, como já disse, há uma confusão minha no enunciado. Vamos supor que a integral fosse*

$$\int_a^t K(s)x(t-s)\,ds = \tilde{K}(t) * x(t),$$

sendo $\tilde{K}(t) = \Theta(t-a)K(t)$*. Neste caso, bastava calcular a transformada de Laplace dos dois lados da equação e usar o resultado conhecido*

$$\mathcal{L}\left[\tilde{K}(t) * x(t)\right] = \mathcal{L}\left[\Theta(t-a)K(t)\right]\mathcal{L}\left[x(t)\right],$$

e termos o resultado. O problema é que

$$\int_a^t K(s)x(t-s)\,ds \neq \int_a^t K(t-s)x(s)\,ds = K(t) * (\Theta(t-a)x(t))$$

para $a \neq 0$*! De fato, é facil mostrar que*

$$\int_a^t K(s)x(t-s)\,ds = \int_0^{t-a} K(t-s)x(s)\,ds.$$

Felizmente, ambas são iguais para $a = 0$*, que era o item 2. Ninguem foi prejudicado pelo meu erro. Quem respondeu induzido pelo meu erro ou apresentou qualquer coisa consistente, ganhou o ponto.*

(b) (1.5 Pontos) Resolva a equação para $a = 0$, $f(t) = t$ e $K(t,s) = s - t$.

Solução. *Neste caso, independente do discutido no item anterior, temos*

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{s^{-2}}{1+s^{-2}} = \frac{1}{s^2+1}$$

e portanto $x(t) = \sin t$*.*

2. (2.5 Pontos) A função "dente de serra" $s(x)$ é a função periódica $s(x+2\pi) = s(x)$ definida para $x \in (-\pi, \pi)$ como $s(x) = x$. Obtenha sua série de Fourier.

Solução. *Trata-se de uma função impar, portanto terá expansão apenas em senos* $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, *com*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx - nx\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{-2\cos n\pi}{n} = -2\frac{(-1)^n}{n},$$

de onde tem-se finalmente

$$s(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$

3. (2.5 Pontos) Determine as soluções da EDO $y'\cos x - e^y \sin x = 0$ e esboce-as no plano (x, y).

Solução. *Temos*

$$e^{-y}y' - \tan x = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-y(x)} - \log|\cos x|\right) = 0,$$

de onde temos que as soluções são da forma

$$e^{-y(x)} = A + \log|\cos x|$$

sendo A *uma constante. O lado direito corresponde a função* $\log|\cos x|$ *deslocada verticalmente de* A. *Como*

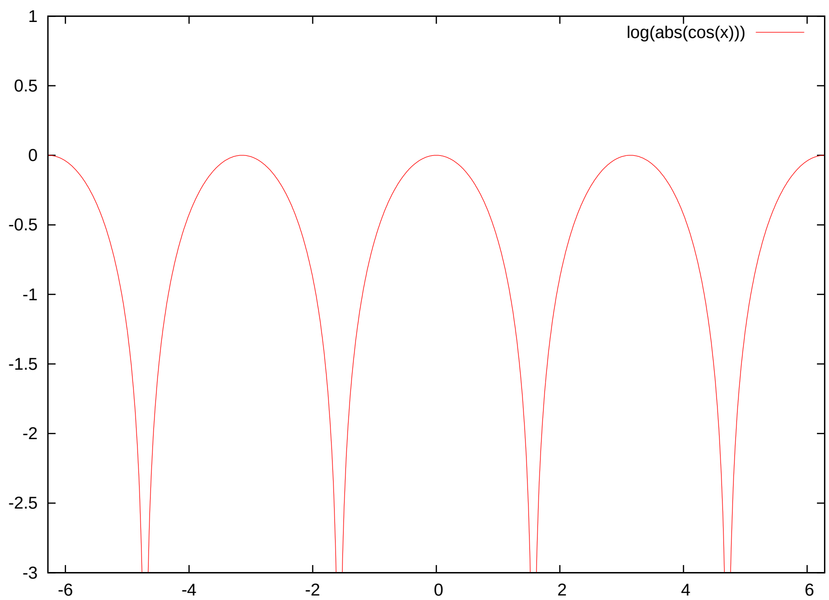


Figura 1: *Função periódica* $\log|\cos x|$. *Giovani CUDA Baraldi tem uma descrição curiosa para essas curvas, perguntem a ele!*

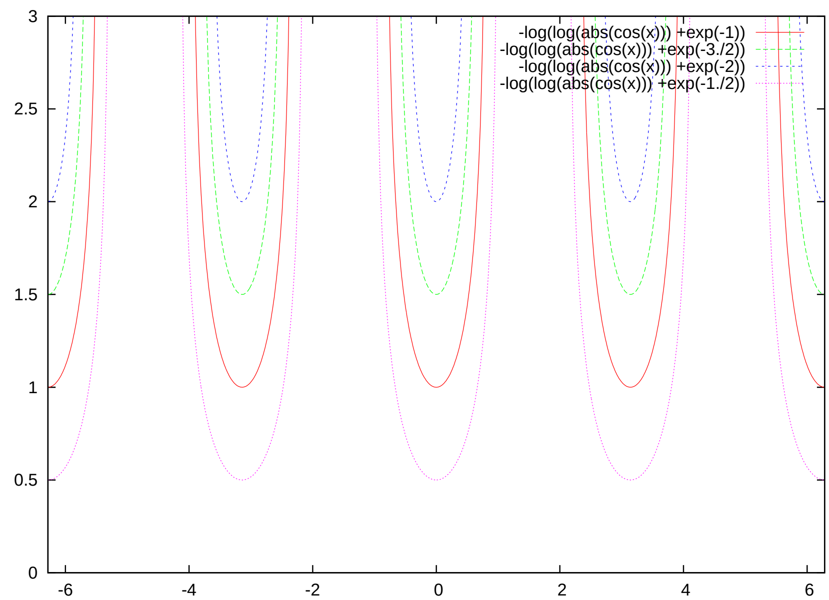
o lado esquerdo é positivo, vemos que necessitamos $A > 0$. *Notem que* $A = e^{-y(0)}$.

Para esboçar as soluções, o primeiro ponto é notar que elas são períodicas e têm período π, $y(x) = y(x+\pi)$, *e além disso são pares* $y(x) = y(-x)$. *Podemos então esbocar o gráfico apenas para* $x = [0, \pi/2]$. *O gráfico pode ser obtido por reflexão do original e cópia deslocando-se de múltiplos de* π *para a direita e para a esquerda.*

Como $|\cos x| \leq 1$, *temos* $A + \log|\cos x| \leq A$, *com a igualdade ocorrendo apenas para* $x = 0$ *no intervalo* $[0, \pi/2]$. *Para um dado valor de* $y(0)$ *(e, portanto, de* $A = e^{-y(0)}$*), teremos* $A + \log|\cos x| = 0$ *para*

$$\cos x_* = e^{-A} = e^{-e^{-y(0)}}.$$

Notem que a função não estará definida para $x_* < x < \pi/2$, *pois neste caso* $A + \log|\cos x| < 0$. *Além disso, a função tem um mínimo em* $x = 0$. *O grafico final seria algo do tipo abaixo, aqui correspondendo a*



$y(0) = 1/2, 1, 3/2$ *e 2. QUalquer esboço/argumentação razoável foi aceito/a.*

4. Considere o seguinte sistema (2×2) de equações diferencias lineares não homogêneas

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} at^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (1 Pontos) Obtenha uma solução geral para $a = 0$.

   Solução. *Os autovalores são os zeros do polinônio* $(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, *que são* $\lambda_\pm = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. *Os autovetores satisfarão o sistema linear*

$$\begin{pmatrix} \frac{1\mp\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1\mp\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} V_\pm = 0$$

   Multiplicando-se a segunda linha por $\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$, *ficamos com*

$$\begin{pmatrix} \frac{1\mp\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1\mp\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} V_\pm = 0,$$

   de onde podemos ler diretamente que

$$V_\pm = \begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A solução geral do sistema homogêneo será, portanto

$$Y(t) = A_+ e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + A_- e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

sendo A_+ e A_- constantes.

(b) (1.5 Pontos) Obtenha a solução do sistema com $a = 1$ e com condições iniciais

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solução. *Devemos encontrar uma solução particular. Vamos procurar uma da forma*

$$Y(t) = V_1 + V_2 t + V_3 t^2,$$

sendo V_1, V_2 e V_3 vetores a serem determinados. Substituindo-se na equaçao, temos

$$V_2 + 2V_3 t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (V_1 + V_2 t + V_3 t^2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^2,$$

o que nos dá as seguintes equações lineares:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} V_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 2V_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} V_2, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} V_1.$$

A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *tem inversa simples* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, *de onde obtemos*

$$V_3 = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$V_2 = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

A solução geral é

$$V(t) = A_+ e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + A_- e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + V_1 + V_2 t + V_3 t^2.$$

As constantes devem satisfazer a condição inicial

$$A_+ \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + A_- \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -16 \end{pmatrix} = 0,$$

de onde temos $A_+ = \frac{8\sqrt{5}-18}{\sqrt{5}}$ *e* $A_= \frac{8\sqrt{5}+18}{\sqrt{5}}$.

5. (2.5 Pontos) Obtenha a solução geral da EDO $2xy'' + (1 + x)y' + 3y = 0$ como uma série em torno da origem e determine seu raio de convergência. (Considere x não negativo).

Solução. *Com sempre, $x = 0$ é um ponto singular regular, então procuraremos solução do tipo*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Substituindo-se na equação, ficamos com

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0,$$

que é equivalente a

$$r(2r-1)a_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r+1)(2n+2r+1)a_{n+1} + (n+r+3)a_n\right]x^n = 0,$$

de onde obtemos $r = 0$ *ou* $r = 1/2$ *e a seguinte recorrência*

$$a_{n+1} = -\frac{n+r+3}{(n+r+1)(2n+2r+1)}a_n.$$

Como as duas raízes da equação indicial não diferem por um inteiro, as duas soluções podem ser obtidas diretamente. A convergência está garantida para qualquer $x \geq 0$*, o que pode ser facilmente mostrado da recorrência.*

Boas férias!!!!