Nome: ________________________________ RA: ____________________

Teste 5 - MA 311 - Cursão, 26 de maio de 2014.

Boa prova!

1. (4 Pontos) Mostre que a função
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
converge para $x > 1$.

Solução. *Sim, trata-se da famosa função ζ de Riemann. Para $x = 1$, ela se reduz a série harmônica, que como sabemos diverge. Para mostrar que ela converge para $x > 1$, podemos usar o teste da integral e comparar a série com a função y^{-a}. Podemos construir uma função "escadinha" $s(y)$ como a que fizemos em sala, mas limitada superiormente por y^{-a}*
$$0 < s(y) \leq y^{-a}$$
Integrando-se ambos os lados e supondo $a > 1$, teremos que a série converge. Com um pouco mais de trabalho (não necessário nesta questão, mas que eu convido todos a fazer), dá pra mostrar que
$$1 < \zeta(x) < \frac{x}{x-1}$$
para $x > 1$.

A função $\zeta(x)$ de Riemann possui essa representação como série **apenas** *para $x > 1$. Para $x < 1$, a função $\zeta(x)$ é definida de outra maneira. Em particular, sabe-se que $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Essa é a origem de toda a discussão a respeito do "resultado"*
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12},$$
que obviamente não tem pé nem cabeça. O que existe, de fato, são duas funções: a função $\zeta(x)$, que está definida para todo $x \neq 1$, mas que apenas para $x > 1$ é dada pela série acima, e uma outra, vamos chamá-la de $g(x)$, que está definida para todo $x > 0$, mas apenas para $0 \leq x < 1$ ela pode ser escrita como $g(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots = \frac{1}{1+x}$. Ocorre que essa função $g(x)$ satisfaz $g(1) = \frac{1}{2}$, o que acaba levando os incautos a "acreditarem" ingenuamente no "resultado"
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}.$$
Voltaremos a isso na questão seguinte.

2. (6 Pontos) Considere a função
$$\zeta_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$
Estabeleça para que valores de x a função é absolutamente convergente e calcule $\zeta_A(x)$ em função de $\zeta(x)$ nestes casos.

Solução. *A função $\zeta_A(x)$ descrita por essa série será absolutamente convergente para os valores de x tais que* *a série do item anterior convergir. Já sabemos que isso ocorre para $x > 1$, e que isso não ocorre para $x = 1$. Basta agora verificar para $x < 1$. Para $x \leq 0$, a série diverge pois*

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0.$$

Para $0 < x < 1$, podemos fazer o teste da integral, construindo a função "escadinha" limitada inferiormente por y^a. Com o teste da integral, veremos que a série diverge para qualquer $0 < a < 1$. Portanto, a função é absolutamente convergente apenas para $x > 1$.

Estabelecido o critério de convergência absoluta, podemos agora manipular as séries sabendo que suas somas parciais irão convergir. Somando-se

$$\zeta_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = -1 + \frac{1}{2^x} - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} - \cdots$$

com

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$$

teremos

$$2\left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \cdots\right) = \frac{2}{2^x}\left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots\right)$$

ou, de outra forma

$$\zeta_A(x) + \zeta(x) = 2^{1-x}\zeta(x),$$

de onde temos o resultado

$$\zeta(x) = -\frac{1}{1 - 2^{1-x}}\zeta_A(x),$$

que é de fato uma relação importante para os cálculos numéricos da função ζ, vejam o EP3 do meu curso de cálculo numérico. O mais interessante aqui é que esta relação pode ser encarada, de fato, como uma extensão de domínio para $\zeta(x)$, isso por que a série alternante $\zeta_A(x)$ pelo critério de Leibniz, converge também (condicionalmente, neste caso) para qualquer $0 < x < 1$! Isto significa que esta expressão nos permite estender a função $\zeta(x)$ para todo x positivo diferente de 1.

Ocorre que a função $\zeta_A(x)$ também possui uma extensão (analítica) para valores de $x < 1$. Esta extensão satisfaz esta mesma relação, de onde tem-se

$$\zeta(-1) = \frac{1}{3}\zeta_A(-1).$$

Porém, existe uma relação entre $\zeta_A(x)$ e função $g(x)$ do item anterior, e ela nos diz que $\zeta_A(-1) = -\frac{1}{2}g(1)$, o que dá o resultado conhecido $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Essas "demonstrações" do youtube correspondem a "forçar" essas identidades sobre as definições dessas funções como séries, fora de seu domínio de validade. Ocorre que é possível "reinterpretar" essas séries de maneira a dar algum sentido a esses resutados. Vejam o verbete Divergent series da wikipedia, ou melhor ainda, o livro de mesmo nome de G. Hardy.