Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 4 - MA 311 - Cursão, 12 de maio de 2014.

Boa prova!

1. (ex. 12 expandido - Butkov) Um oscilador harmônico amortecido sujeito a uma força periódica externa obedece a equação

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t),$$

sendo m, b e k constantes positivas e $f(t)$ uma função periódica de período T.

(a) (6 Pontos) Obtenha a solução geral desta equação, supondo conhecida a série de Fourier de $f(t)$.

Solução. *São três os casos para a solução da homogênea.*

i. *Amortecimento subcrítico:* $b^2 - 4mk < 0$. *A solução da homogênea é:*

$$x(t) = e^{-\frac{bt}{2m}}\left(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\right),$$

com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$.

ii. *Amortecimento supercrítico:* $b^2 - 4mk > 0$. *A solução da homogênea é:*

$$x(t) = e^{-\frac{bt}{2m}}\left(c_1 \cosh \lambda t + c_2 \sinh \lambda t\right),$$

com $\lambda = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$.

iii. *Amortecimento crítico:* $b^2 - 4mk = 0$. *A solução da homogênea é:*

$$x(t) = e^{-\frac{bt}{2m}}\left(c_1 + c_2 t\right),$$

com $\lambda = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$.

A solução geral será a soma da solução da homogênea e de uma solução particular. Sendo

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right),$$

procuraremos soluções particulares com série de Fourier

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + B_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right).$$

Inicialmente, vamos considerar a solução particular para uma força externa harmônica do tipo

$$f_n = a_n \cos \omega_n t.$$

Procuremos soluções do tipo

$$x_n(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t.$$

Substituindo-se na equação, temos

$$\left(kA - m\omega_n^2 A + Bb\omega_n\right)\cos \omega_n t + \left(kB - m\omega_n^2 B - Ab\omega_n\right)\sin \omega_n t = a_n \cos \omega_n t,$$

de onde temos que

$$B = \frac{\xi\omega_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)} A,$$

com $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\xi = \frac{b}{m}$. *Temos*

$$A = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)^2 + \xi^2\omega_n^2} \frac{a_n}{m}.$$

De maneira análoga podemos fazer o caso de $f_n = b_n \sin \omega_n t$, *e concluíremos que uma solução particular para o sistema com uma excitação externa do tipo*

$$f_n = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$$

será

$$x_n(t) = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)^2 + \xi^2\omega_n^2} \left[\left(\frac{a_n}{m} + \frac{\xi\omega_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \frac{b_n}{m} \right) \cos \omega_n t - \left(\frac{b_n}{m} - \frac{\xi\omega_n}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \frac{a_n}{m} \right) \sin \omega_n t \right].$$

Com este resultado, podemos construir finalmente a série de Fourier da solução particular

$$x(t) = \frac{a_0}{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t),$$

com $\omega_n^2 = \frac{2n\pi}{T}$.

(b) (4 Pontos) Discuta como a amplitude da solução estacionária (solução para $t \to \infty$) depende dos parâmetros da equação e da série de Fourier de $f(t)$.

Solução. *Para* $t \to \infty$, *qualquer contribuição da solução homogênea vai desaparecer. Ficaremos apenas com a particular do item anterior. A amplitude dos modos de Fourier da solução são dados pela expressão acima. Os modos de máxima amplitude, que dominarão a solução estacionária, são aqueles com* ω_n *próximo a* ω_0. *(Esta era a resposta esperada). Este é o famoso caso de ressonância, com direito a fator* Q *e tudo mais. Conversaremos sobre isso em aula.*