Nome: ______________________________ RA: __________________

Teste 3 - MA 311 - Cursão, 7 de abril de 2014.

Boa prova!

1. Considere o seguinte sistema (2×2) de equações diferencias lineares não homogêneas

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} at^p \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) (3 Pontos) Obtenha uma solução geral para $a = 0$.

Solução: *Os autovalores são dados pela equação* $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$, *cujas soluções são* $\lambda = 1$ *e* $\lambda = 3$, *cujos autovetores associados são* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *A solução geral é*

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

(b) (3 Pontos) Mostre que, para p inteiro não negativo, o sistema tem solução particular do tipo

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{p} B_k t^k.$$

Solução: *Substituindo-se na equação, temos*

$$\sum_{k=1}^{p} k B_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{p} M B_k t^k + C t^p,$$

sendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $C = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. *Temos*

$$(MB_p + C)t^p + \sum_{k=0}^{p-1} [MB_k - (k+1)B_{k+1}] t^k = 0,$$

que deve ser satisfeito para todo t, *o que implica em*

$$MB_p = -C,$$

que tem solução (B_p) *única pois* M *é invertível e*

$$MB_k = (k+1)B_{k+1},$$

com $k = p-1, p-2, \ldots, 1, 0$, *que também tem solução* (B_k) *única.*

(c) (3 Pontos) Para o caso de p racional não negativo, é possível obter uma solução particular como a do item acima (soma finita de potências menores ou iguais a p)? Justifique.

Solução: *É impossível. A questão é equivalente a perguntar se há soluções do tipo*

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} B_k t^{q_k},$$

sendo $\{q_k\}$ uma seqüência de n racionais com $q_n = p$, a qual admitimos, sem perda de generalidade, ordenada ($q_k < q_\ell$ se $k < \ell$). Substituindo-se na equação, temos

$$\sum_{k=1}^{n} q_k B_k t^{q_k - 1} = \sum_{k=1}^{n} M B_k t^{q_k} + C t^p,$$

de onde tem-se

$$(MB_n - C)t^p - pB_n t^{p-1} + \sum_{k=1}^{n-1} MB_k t^{q_k} - \sum_{k=1}^{n-1} q_k B_k t^{q_k - 1} = 0. \tag{1}$$

Vamos supor, inicialmente, que a seqüência $\{q_k\}$ é uma PA da forma $q_k = p - n + k$. Temos

$$(MB_n - C)t^p + \sum_{k=1}^{n-1} \left([MB_k - (p-n+k+1)B_{k+1}\right] t^{p-n+k} - (p-n)B_1 t^{p-n} = 0. \tag{2}$$

As equações para B_k são incompatíveis. Do último termo, tem-se $B_1 = 0$, já que $p - n \neq 0$ pois p é racional, o que é incompatível com as outras equações. Se não houver nenhum elemento da seqüência tal que $q_k = p - 1$, então as duas primeiras potências de (1) darão equações incompatíveis. A última possibilidade é $m < n$ elementos da seqüência $\{q_k\}$ formem a PA. Neste caso, as equações virão de uma mistura de termos do tipo (2) e (1), e da mesma maneira não haverá nenhuma solução B_k que as satisfaça.

(d) (1 Ponto) Obtenha a solução do sistema com $a = 1$ e $p = 2$, e com condições iniciais

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solução: *Com $p = 2$ temos*

$$Y(0) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2,$$

sendo

$$MB_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad MB_1 = 2B_2, \quad MB_0 = B_1.$$

Como

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

temos como solução geral

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 \\ -13 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} t + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t^2.$$

A solução com as condições iniciais dadas é aquela para a qual $c_1 + c_2 = \frac{14}{27}$ e $-c_1 + c_2 = \frac{13}{27}$, i.e., $c_1 = \frac{1}{54}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$.