Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 2 - MA 311 - Cursão, 24 de março de 2014.

Boa prova!

Considere as seguintes equações diferenciais ordinárias lineares:

EDO 1: $y'' + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$,

EDO 2: $z''' + az''(x) + bz'(x) + cz(x) = 0$;

sendo $p(x)$ e $q(x)$ funções suaves e a, b e c constantes, todas reais. Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas, provando as verdadeiras e apresentando um contra-exemplo para as falsas.

1. (1 Ponto) Se $y(x) = y_1(x)$ é solução da EDO 1, $y(x) = y_1^2(x)$ nunca será a outra solução LI.
   Solução: *Falso. Contra-exemplo: a equação*
   $$\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} - 2\right) y = y'' - 3y' + 2y = 0$$
   tem como soluções LI $y(x) = e^x$ e $y(x) = e^{2x}$.

2. (1 Ponto) Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da EDO 1 com $p(x) = 0$. O determinante Wronskiano $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ é uma constante (não depende de x).
   Solução: *Verdadeiro. Prova: tem-se*
   $$W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) = -p(x)y_1y_2'(x) + p(x)y_1'y_2(x) = -p(x)W(x)$$
   cuja solução para $p(x) = 0$ é $W(x)$ constante.

3. (1 Ponto) Sejam $z_1(x)$, $z_2(x)$ e $z_3(x)$ três soluções LI da EDO 2. É sempre possível multiplicar estas soluções por constantes α_i não nulas a fim de se obter
   $$W(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1 z_1 & \alpha_2 z_2 & \alpha_3 z_3 \\ \alpha_1 z_1' & \alpha_2 z_2' & \alpha_3 z_3' \\ \alpha_1 z_1'' & \alpha_2 z_2'' & \alpha_3 z_3'' \end{vmatrix} = 1$$
   Solução: *Falso. Contra-exemplo: a equação*
   $$\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} - 2\right)\left(\frac{d}{dx} - 3\right) z = z'' - 6z'' + 11z' - 6z = 0$$
   tem como soluções LI $z(x) = e^x$, e^{2x} e e^{3x}. O Wronskiano em questão sempre será proporcional a e^{6x}, não podendo ser constante.

4. (1 Ponto) Sejam $z_1(x)$, $z_2(x)$ e $z_3(x)$ três soluções LI da EDO 2. É impossível escrever uma quarta solução $z_4(x)$, combinação linear das anteriores, tal que:

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1' & z_2' & z_3' & z_4' \\ z_1'' & z_2'' & z_3'' & z_4'' \\ z_1''' & z_2''' & z_3''' & z_4''' \end{vmatrix} = 1$$

Solução: *Verdadeiro. Prova: se $z_4(x)$ é combinação linear das três soluções, a quarta coluna da matriz Wronskiana será combinação linear das anteriores, e o determinante irá sempre se anular.*

5. (1.5 Ponto) Se $w(x)$ não constante é simultaneamente solução de EDO 1 e da EDO 2, então $p(x)$ e $q(x)$ são constantes.

Solução: *Falso. Contra-exemplo: $w(x) = x$ é solução da EDO 2 com $a = b = c = 0$, e pode ser solução da EDO 1 se $p(x) + xq(x) = 0$, que admite infinitas soluções com $q(x)$ e $p(x)$ não constantes.*

6. (1.5 Ponto) Se $y(x)$ é solução da EDO 1, então existem α , β e x_0 reais tais que $|y(x)| \leq \alpha e^{\beta x}$ para $x > x_0$ (a solução é dita *limitada exponencialmente*).

Solução: *Falso. Contra-exemplo: a função e^{x^2} não é exponencialmente limitada e pode ser solução da EDO 1 se*

$$(4x^2 + 2) + 2xp(x) + q(x) = 0,$$

que tem infinitas soluções.

7. (1.5 Ponto) Se $z(x)$ é solução da EDO 2, então $z(x)$ é limitada exponencialmente.

Solução: *Verdadeiro se os três autovalores forem diferentes. Prova: a EDO 2 mais geral pode ser escrita como*

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_3\right) z = 0.$$

(um dos λ é certamente real, como discutimos em aula.) Seja $\Lambda = \max_i \Re(\lambda_i)$. A solução geral dessa EDO será

$$z(x) = e^{\Lambda x}\left(C_1 e^{(\lambda_1 - \Lambda)x} + C_2 e^{(\lambda_2 - \Lambda)x} + C_3 e^{(\lambda_3 - \Lambda)x}\right)$$

de onde se tem

$$|z(x)| \leq e^{\Lambda x}\left|C_1 e^{(\lambda_1 - \Lambda)x} + C_2 e^{(\lambda_2 - \Lambda)x} + C_3 e^{(\lambda_3 - \Lambda)x}\right| \leq \left(|C_1| + |C_2| + |C_3|\right) e^{\Lambda x},$$

para $x \geq 0$, onde usamos o fato de que $|e^{\alpha x}| \leq 1$ para $x \geq 0$ se $\Re(\alpha) \leq 0$, que vem diretamente da fórmula de Euler para os números complexos. Dem uma olhada no material de Cálculo IV do fórum.

Solução: *Falso se dois autovalores forem iguais, pois neste caso uma solução pode ser $x^{\lambda_i x}$, que não é limitada exponencialmente.*

Ambas soluções serão aceitas. Apesar do enunciado, como está, ser falso, eu acabei induzindo ao erro sugerindo que os autovalores eram diferentes.

8. (1.5 Ponto) Se $z_1(x)$ e $z_2(x)$ são soluções da EDO 2, então $\frac{z_1(x)}{z_2(x)}$ é limitada exponencialmente.
Solução: *Falso. Contra-exemplo: Considere a equação*

$$\left(\frac{d}{dx}-1\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}+1\right)z=0,$$

que tem como solução, por exemplo $z_1=\sin x$ *e* $z_2=\cos x$. *Neste caso,* $\frac{z_1(x)}{z_2(x)}=\tan x$, *que não é exponencialmente limitada. (Prove!)*