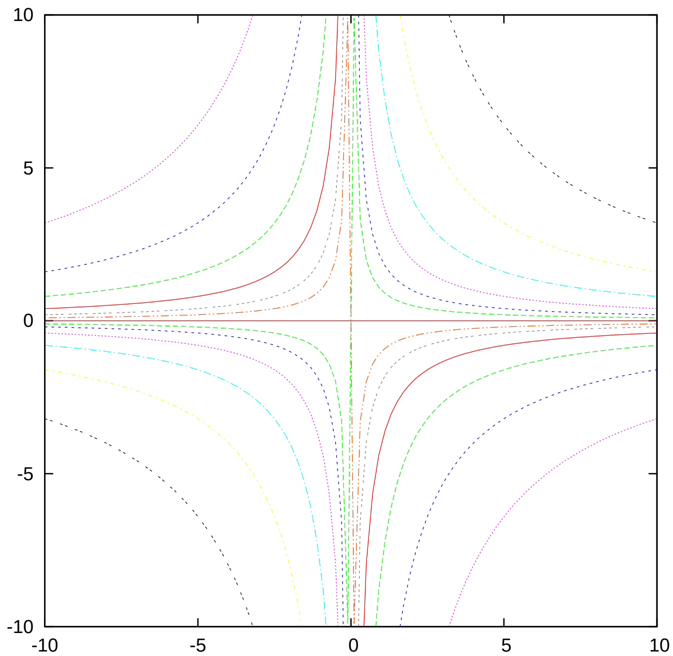
Nome: ____________________ RA: ____________________

Teste 1 - MA 311 - Cursão, 10 de março de 2014.

Boa prova!

1. (5 Pontos) Determine as soluções da EDO $xy' + y = 0$ e esboce-as no plano (x, y).
   Solução: *Notem que $xy' + y = \frac{d}{dx}xy$, e que portanto as solução são as hipérboles $xy =$cte. Um esboço bonitinho vai abaixo....*



2. (8.24.18-20) Determine a função $f(x)$ (contínua) não negativa tal que a área sob seu gráfico em um intervalo arbitrário $[x_0, x_1] \in \mathbb{R}$ seja proporcional a:
   (a) (3 Pontos) $f(x_1) - f(x_0)$.
   Solução:
$$\int_{x_0}^{x_1} f(s)\, ds = \alpha\,(f(x_1) - f(x_0))\,.$$
   Derivando-se ambos os lados, por exemplo, em relação a x_1 (que é arbitrário) e usando-se o teorema fundamental do cálculo, tem-se
$$f(x) = \alpha f'(x)$$
   cuja solução geral é bem conhecida $f(x) = Ce^{\frac{x}{\alpha}}$. Notem que o que fizemos foi mostrar que a integral acima **implica** *que a função tem esta forma. Podemos mostrar a "volta" também facilmente, o que confirma que está é efetivamente a função que procuramos ($C \geq 0$, por ser $f(x)$ não negativa).*

(b) (1 Ponto) $f(x_1) + f(x_0)$.

Solução: *Fazendo-se com no caso anterior, vamos obter do teorema fundamental do cálculo a mesma função* $f(x) = Ce^{\frac{x}{\alpha}}$. *Porém, quando fizermos a "volta", veremos que a condição*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(s)\, ds = \alpha\left(f(x_1) + f(x_0)\right).$$

somente será satisfeita se $C = 0$*(!). Quer dizer, somente a função* $f(x) = 0$ *satisfaz esta (estranha) propriedade. Poderíamos tambem inferir este resultado diretamente do limite* $x_1 \to x_0$ *na integral, o que daria* $2\alpha f(x_0) = 0$*, e sendo* x_0 *arbitrário, temos o nosso resultado.*

(c) (1 Ponto) $f(x_1)f(x_0)$.

Solução: *A condição neste caso é*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(s)\, ds = \alpha f(x_1) f(x_0).$$

Do limite $x_1 \to x_0$ *na integral temos* $\alpha f(x_0)^2 = 0$*. Como* x_0 *é arbitrário, temos que* $f(x) = 0$.