Nome: ______________________________ RA: __________________

Prova 2 - MA 311 - Cursão, 30 de junho de 2014.

Boa prova!

1. (2 Pontos) Seja $f(x)$ uma função ímpar e de período 2π tal que $f(x) = \sin^2 x$ para $x \in [0, \pi]$. Obtenha sua série de Fourier.

Solução. *Sendo a função ímpar, ela terá apenas termos de* sin *em sua série de Fourier*

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \, dx,$$

sendo

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin nx \, dx.$$

Usando-se que $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ *e que* $\sin nx \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\sin(n+2)x + \sin(n-2)x \right)$ *temos*

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+2)x}{2(n+2)} + \frac{\cos(n-2)x}{2(n-2)} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \frac{\cos n\pi - 1}{n(n^2-4)}.$$

Finalmente, tem-se

$$\sin^2 x = -\frac{8}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\sin nx}{n(n^2-4)}.$$

2. Considere a função β de Dirichlet

$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x},$$

com $x \in \mathbb{R}$.

(a) Determine para que valores de x o somatório acima converge

i. (1 Ponto) absolutamente e

Solução. *Os valores de x que garantem a convergência absoluta de $\beta(x)$ são os que garantem a convergência de*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x},$$

que corresponde a subseqüência dos ímpares na função $\zeta(x)$, ver T5. A convergência absoluta requer $x > 1$.

ii. (1 Ponto) condicionalmente.

Solução. *Pelo critério de Leibniz das séries alternantes, basta $x > 0$. Portanto, será condicionalmente convergente pra $0 < x \leq 1$ (Ver T5).*

(b) (1.5 Ponto) Mostre que famosa constante de Catalan G, que é dada por $G = \beta(2)$, pode ser calculada também como

$$G = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1 + x^2y^2}.$$

(Dica: Explore a função $\arctan x$ e sua série de Taylor: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$, válida para todo x real. Dica 2: $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.)

Solução. *Fazendo-se primeiro a integração em y com ajuda da Dica 2, ficamos com*

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\, dx.$$

Usando-se a Dica 1 (havia um erro na versão da prova, o primeiro termo aparecia como 1 e não x. Ninguem será prejudicado por isso.):

$$G = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots\right) dx.$$

Como a série de Taylor da Dica 1 é válida em toda a reta e o intervalo de integração é limitado, o integrando converge uniformemente e, portanto, podemos comutar a integração e a soma

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = \beta(2).$$

3. (2.0 Pontos) Obtenha a solução geral da EDO $xy'' + 2y' + 4y = 0$ como uma série em torno da origem e determine seu raio de convergência. (Considere x não negativo).

Solução. *O ponto $x = 0$ é regular e portanto podemos procurar soluções do tipo*

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

Substituindo-se na equação, ficamos com

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 2(n+r)a_n x^{n+r-1} + 4a_n x^{n+r}\right] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1)a_n x^{n+r-1} + 4a_n x^{n+r}\right] = 0$$

de onde temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r+1)(n+r+2)a_{n+1} x^{n+r} + 4a_n x^{n+r}\right] = 0$$

e $r(r+1) = 0$. Para a primeira solução LI, tomemos $r = 0$, o que nos dá a seguinte série de recorrência

$$a_{n+1} = \frac{-4a_n}{(n+1)(n+2)},$$

cuja solução geral é simples $a_n = \frac{(-4)^n}{(n+1)!n!} a_0$. Vamos admitir sem perda de generalidade $a_0 = 1$. A solução da EDO será, portanto,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{(n+1)!n!}.$$

Notem que

$$|y_1(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(n+1)!n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = e^{4x},$$

o que garante a convergência da série para todos os valores de x tais que a exponencial converge, i.e., *para todo x.*

Como as raizes diferem por um inteiro, vamos procurar a segunda solução como

$$y_2(x) = y_1(x)\log x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}.$$

Ficamos com

$$2y_1'(x) + x^{-1}y_1(x) + r(r+1)b_0x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r+1)(n+r+2)b_{n+1}x^{n+r} + 4b_nx^{n+r}\right] = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_nx^{n-1} + r(r+1)b_0x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n+1)b_{n+1} + 4b_n\right]x^{n+r} = 0$$

escolhendo-se $r=-1$, ficamos com

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2n+1)a_n + n(n+1)b_{n+1} + 4b_n\right]x^{n-1} = 0.$$

Para $n=0$, temos $b_0 = -a_0/4 = -1/4$. Para $n>0$, temos a seguinte fórmula de recorrência

$$b_{n+1} + \frac{4}{n(n+1)}b_n = -\frac{(2n+1)}{n(n+1)}a_n = -\frac{(-4)^n(2n+1)}{n(n+1)(n+1)!n!},$$

sendo b_1 arbitrário.

Não era necessário, mas podemos comentar algo sobre a solução geral dessa recorrência. Note que se trata de uma equação a diferenças do tipo

$$b_{n+1} + \frac{4}{n(n+1)}b_n = f(n).$$

Em particular, como no caso das EDO, qualquer solução da homogênea

$$b_{n+1}^h + \frac{4}{n(n+1)}b_n^h = 0$$

pode ser somada a uma solução e dar origem a uma nova solução (linearidade em b_n). A solução dessa equação homogênea é a mesma do item anterior

$$b_n^h = \frac{(-4)^{n-1}}{n!(n-1)!}b_1^h,$$

com b_1 arbitrário, que tomamos igual a 1. Motivados pelas EDOs, podemos procurar soluções aqui também pelo método da "variação dos parâmetros". Vamos procurar solução do tipo

$$b_n = c(n)b_n^h,$$

sendo $c(n)$ uma função (discreta) a ser determinada. Substituindo-se na equação e usando-se o fato que b_n^h é soluçãod a homogênea, ficamos com

$$(c(n+1) - c(n))b_{n+1}^h = f(n)$$

de onde temos

$$c(n+1) - c(n) = \frac{f(n)}{b_{n+1}^h}.$$

Porem, esta seqüencia é telescópica, sendo facilmente somável, o que nos dá

$$c(n) = c(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{b_{k+1}^h},$$

o que nos permite escrever a solução geral da recorrência (não era necessário fazer isso na prova!). Qualquer semelhança com derivadas e integrais NÃO é mera coincidência. Equações discretas (de diferenças) tem muita semelhanças com as EDO!!!

4. (2.5 Pontos) Considere a equação da corda vibrante **com dissipação**

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) + b\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x),$$

sendo b e c constantes positivas. Resolva o problema de uma corda deste tipo de comprimento L, fixa em suas extremidades ($u(t,0) = u(t,L) = 0$), e sujeita à condição inicial

$$u(0,x) = \sin^2\frac{\pi x}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = 0.$$

Solução. *Fazendo separação de varíaveis $u(t,x) = T(t)X(x)$, ficamos com*

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} + b\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = k,$$

sendo k uma constante. Temos portanto duas EDOs

$$T''(t) + bc^2T'(t) = kc^2T(t), \quad X''(x) = kX(x).$$

A condição de contorno dos extremos fixos implica que $k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e ficamos finalmente com a seguinte solução geral

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

sendo $T_n(t)$ uma solução de

$$T_n''(t) + bc^2T_n'(t) + \omega_n^2T_n(t) = 0,$$

com $\omega_n = \frac{n\pi ct}{L}$. Ocorre que essa equação é a de um oscilador harmônico amortecido, cujas soluções podem ser

$$T_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{bc^2t}{2}}\left(A_n\cos\bar\omega_n t + B_n\sin\bar\omega_n t\right), & \text{se } \bar\omega_n^2 = \omega_n^2 - \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2 > 0, \\ e^{-\frac{bc^2t}{2}}\left(A_n\cosh\lambda_n t + B_n\sinh\lambda_n t\right), & \text{se } \lambda_n^2 = \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2 - \omega_n^2 > 0, \\ e^{-\frac{bc^2t}{2}}\left(A_n + B_n t\right), & \text{se } \frac{bc^2}{2} = \omega_n. \end{cases}$$

As constantes A_n e B_n devem ser determinadas a partir da condição inicial. Notem que, independente do caso do amortecimento, temos $T_n(0) = A_n$. Para a derivada, temos

$$T_n(0) = \begin{cases} \omega_n B_n - \frac{bc^2}{2}A_n, & \text{se } \bar\omega_n^2 = \omega_n^2 - \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2 > 0, \\ \lambda_n B_n - \frac{bc^2}{2}A_n, & \text{se } \lambda_n^2 = \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2 - \omega_n^2 > 0, \\ B_n - \frac{bc^2}{2}A_n & \text{se } \frac{bc^2}{2} = \omega_n. \end{cases}$$

Os A_n são definidos a partir da condição

$$\sin^2\frac{\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Usando-se o resultado da questão 1, temos

$$A_n = \frac{8}{L}\frac{\cos n\pi - 1}{n(n^2-4)}$$

A condição $\frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = 0$ *será garantida pelos* B_n *acima.*

Deste exercício, aprendemos algo interessante para instrumentos de corda. O amortecimento, sempre presente na prática, afeta mais as freqüências baixas (graves), chegando inclusive a poder eliminá-las completamente (no caso do amortecimento crítico ou supercrítico). Infelizmente, esta margem é muito curta para continuarmos.... Boas férias!!