Nome: ______________________________ RA: ____________________

Prova 2 – Variáveis Complexas – MA044 – 22 de maio de 2024

- *Esta prova contém 4 questões de múltipla escolha, cada uma valendo 1.5 pontos, e duas dissertativas, que estão no verso desta folha e valem 2 pontos cada uma.*
- *Assinale claramente suas escolhas nas questões 1 a 4, e responda as questões 5 e 6 no espaço indicado. Nas questões de múltipla escolha, NDA significa que nenhuma das outras opções é correta.*
- **Não entregue seus rascunhos.** *Entregue apenas esta folha de questões, com as respostas pertinentes, identificando-se claramente no cabeçalho acima.*
- *A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas o mais rápido possível no site do curso:* `http://vigo.ime.unicamp.br/ma044`

---

1. (1.5 Pontos) Calcule $\oint_\Gamma \frac{dz}{\bar{z}}$, sendo Γ o círculo unitário centrado na origem e percorrido na direção anti-horária.

   A. 0 B. $2\pi i$ C. $-2\pi i$ D. πi E. $-\pi i$ F. $\frac{\pi}{2}i$ G. $-\frac{\pi}{2}i$ H. NDA

   Solução. *Este exercício é uma variação do exemplo 2 da seção 42 do livro. A solução correta é A. O cálculo é simples. Parametrizando-se o círculo unitário da maneira usual, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, teremos*

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{\bar{z}} = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}d\theta}{e^{-i\theta}} = i\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}d\theta = 0.$$

2. (1.5 Pontos) Calcule $\oint_\Gamma \frac{e^{az}}{z}dz$, sendo Γ o círculo unitário percorrido na direção anti-horária e a uma constante real arbitrária.

   A. 0 B. $2\pi i$ C. $-2\pi i$ D. πi E. $-\pi i$ F. $\frac{\pi}{2}i$ G. $-\frac{\pi}{2}i$ H. NDA

   Solução. *Esta é a primeira parte do exercício 7 da lista 5. Resposta B, que pode ser obtida diretamente da fórmula integral de Cauchy.*

3. (1.5 Pontos) Calcule $\oint_\Gamma \operatorname{Log} z\, dz$, sendo $\operatorname{Log} z$ o ramo principal da função logaritmo e Γ o círculo unitário percorrido na direção anti-horária.

   A. 0 B. $2\pi i$ C. $-2\pi i$ D. πi E. $-\pi i$ F. $\frac{\pi}{2}i$ G. $-\frac{\pi}{2}i$ H. NDA

   Solução. *Este exercício foi feito em classe. A solução correta é C. Vejam a questão 5.*

4. (1.5 Pontos) Encontre uma representação em termos de potências negativas válida para $|z| > 1$ para a função $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$.

A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$ C. $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$ D. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}$

E. $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}}$ F. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n}}$ G. $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n}}$ H. NDA

Solução. *Este é o exercício 3 da L6. A resposta é G. Notem que*

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right).$$

O termo entre parêntesis é a série geométrica para $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n},$$

a qual converge para $|z| > 1$, *de onde o resultado segue.*

5. (2 Pontos) Seja $\log z$ a função logaritmo completa (multivaluada) com sua linha de corte situada em $\operatorname{Arg} z = \alpha \in [-\pi, \pi)$. Calcule $\oint_\Gamma \log z dz$, sendo Γ o círculo de raio R centrado na origem e percorrido na direção anti-horária.

Solução. Este problema foi resolvido em sala. O caminho Γ pode ser parametrizado como $z = Re^{i\theta}$, $\alpha \le \theta \le 2\pi + \alpha$. Ficamos com

$$\oint_\Gamma \log z dz = iR\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \log\left(Re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta = iR\int_\alpha^{2\pi+\alpha}(\log R + i\theta + 2\pi k i)\,e^{i\theta}d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A primeira e a última integral se anulam devido a periodicidade da função $e^{i\theta}$. A segunda integral pode ser calculada usando-se a *Feynman's trick*,

$$i\theta e^{i\theta} = \left(\frac{d}{da}e^{ia\theta}\right)_{a=1},$$

de onde temos

$$\oint_\Gamma \log z dz = iR\int_\alpha^{2\pi+\alpha}\left(\frac{d}{da}e^{ia\theta}\right)_{a=1}d\theta = iR\left(\frac{d}{da}\int_\alpha^{2\pi+\alpha}e^{ia\theta}d\theta\right)_{a=1} = iR\left(\frac{d}{da}\frac{e^{(2\pi+\alpha)ai} - e^{\alpha a i}}{ia}\right)_{a=1} = 2\pi i R e^{\alpha i}.$$

6. (2 Pontos) Considere a seguinte proposição: Se $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$ para todos círculos Γ centrados na origem, então $f(z)$ é analítica para todo $z \in \mathcal{D} = \mathbb{C} - \{0\}$. Prove-a, se for verdadeira, ou dê um contra-exemplo caso seja falsa. (Identifique claramente se você a considera verdadeira ou falsa.)

Solução. A afirmação é falsa. Um contra-exemplo simples é a função da questão 1. Para obter os 2 pontos, a resposta deve exibir claramente algum contra-exemplo válido.