Nome: _____

RA: _____

 Prova 1 – Variáveis Complexas – MA044 – 10 de abril de 2024

- Esta prova contém 4 questões de múltipla escolha, cada uma valendo 1.5 pontos, e duas dissertativas, que estão no verso desta folha e valem 2 pontos cada uma.
 - Assinale claramente suas escolhas nas questões 1 a 4, e responda as questões 5 e 6 no espaço indicado. Nas questões de múltipla escolha, NDA significa que nenhuma das outras opções é correta.
 - **Não entregue seus rascunhos.** Entregue apenas esta folha de questões, com as respostas pertinentes, identificando-se claramente no cabeçalho acima.
 - A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas o mais rápido possível no site do curso: <http://vigo.ime.unicamp.br/ma044>
-

1. (1.5 Pontos) Calcule $\sum_{k=0}^{50} i^{-k}$.

A. i B. $-i$ C. 1 D. -1 E. $1+i$ F. $1-i$ G. $-1+i$ H. NDA

Solução. Este exercício é uma variação do 4(f) da L1. A solução correta é B. O cálculo é simples, basta notar que temos uma PG de razão i^{-1} :

$$s = \sum_{k=0}^{50} i^{-k} = 1 + i^{-1} + i^{-2} + \dots + i^{-50},$$

e portanto

$$i^{-1}s = i^{-1} + i^{-2} + \dots + i^{-50} + i^{-51}.$$

Subtraindo-se as duas expressões

$$(i^{-1} - 1)s = i^{-51} - 1 \Rightarrow s = \frac{1 - i^{-51}}{1 - i^{-1}}.$$

Porém, $i^{-1} = -i$, de onde temos finalmente

$$s = \frac{1 + i^{51}}{1 + i} = \frac{1}{2} (1 - i) (1 + i^{51}) = \frac{1}{2} (1 - i)^2 = -i,$$

onde usou-se $i^{51} = i^{50}i = (-1)^{25}i = -i$.

2. (1.5 Pontos) O número complexo $z = e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{-\frac{\pi}{6}i}$ pode ser escrito na forma $z = a + bi$ como

A. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ B. $\frac{i}{2}(\sqrt{3} + 1)$ C. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) + \frac{i}{2}(\sqrt{3} - 1)$ D. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) + \frac{i}{2}(\sqrt{3} + 1)$
 E. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) + \frac{i}{2}(\sqrt{3} + 1)$ F. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + i)$ G. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i)$ H. NDA

Solução. Este exercício é uma variação do 1(g) da L1. A solução correta é C. Basta notar que

$$z = e^{\frac{\pi}{3}i} + e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i + \sqrt{3}i - i) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) + \frac{i}{2} (\sqrt{3} - 1)$$

3. (1.5 Pontos) O limite $\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{\bar{z}-1} \right)^3$ corresponde a

- A. 1 B. -1 C. i D. $-i$ E. 0 F. $(1+i)^3$ G. $(1-i)^3$ H. NDA

Solução. Este exercício é uma variação do 5 da L2 e do exemplo 2 da seção 15 do Churchill. A resposta correta é H, pois esse limite não existe. A maneira mais simples de mostrar este resultado é considerar, como no exemplo 2, os limites como $z = (1+x, 0)$ e $z = (1, y)$. No primeiro caso, teremos

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{\bar{z}-1} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x} \right)^3 = 1$$

enquanto no segundo caso temos

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{\bar{z}-1} \right)^3 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{y}{y} \right)^3 = -1$$

estabelecendo a não existência do limite.

4. (1.5 Pontos) As soluções da equação $\cos z = 2$ são

- A. $z = 2n\pi \pm i \ln 2$ B. $z = 2n\pi \pm i \ln \sqrt{3}$ C. $z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln 2$
 D. $z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln \sqrt{3}$ E. $z = n\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$
 F. $z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$ G. $z = 2n\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$ H. NDA

com $n \in \mathbb{Z}$. (Dica: da L3, você deveria saber que $\sinh \log(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$.)

Solução. Este exercício é uma variação do 2 da L3. A opção correta é a G. Lembrando que $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, temos que $\cos z = 2$ requer $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Como $\cosh y > 0$, estão descartados os n ímpares, e ficamos com $z = 2n\pi + i \operatorname{arccosh} 2$. Porém, da dica temos $\cosh^2 \log(2 + \sqrt{3}) = 4$, de onde tem-se finalmente

$$z = 2n\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}),$$

$n \in \mathbb{Z}$.

5. (2 Pontos) Esboce no plano complexo a localização das soluções da equação $z^{\frac{2}{3}} = 1$.

Solução. Bem, já me desculpei sobre esta questão. O solução do hexágono é de outro problema, é do caso $z^3 = \pm 1$. O enunciado como está só tem as soluções $z = -1, 1$, como alertado pelo colega Henrique, que merece os meus agradecimentos públicos. ☺

A solução pode ser facilmente obtida considerando-se a equação

$$\left(z^{\frac{1}{3}} \right)^2 = 1 \Rightarrow z^{\frac{1}{3}} = \pm 1,$$

que implica $z = -1, 1$. O esboço, portanto, corresponde apenas a esses dois pontos. ✓

6. (2 Pontos) Considere a seguinte proposição: $\log(z^q) = q \log z$, para q racional e $z \in \mathbb{C}$ arbitrários, sendo $\log z$ a função logarítmica completa (multivaluada). Prove-a, se for verdadeira, ou dê um contra-exemplo caso seja falsa. (Identifique claramente se você a considera verdadeira ou falsa.)

Solução. A afirmação é falsa, não vale sequer para q inteiro. Um contra-exemplo simples é o exercício 5b da L3, que foi comentado em aula:

$$\begin{aligned} \log(i^{-2}) &= \log(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\neq 2 \log i = 2 \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i = (4k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Notem que a proposição é falsa inclusive se nos restringimos ao ramo principal do logaritmo. Usando-se a parametrização $-\pi < \theta \leq \pi$, teremos para $z = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z^2) &= \operatorname{Log}\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) = \operatorname{Log}\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}\right) = -\frac{\pi}{2}i, \\ &\neq 2\operatorname{Log}z = \frac{3\pi}{2}i.\end{aligned}$$

É fácil ver que a proposição é verdadeira para o ramo principal se $\operatorname{arg}z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Enfim, a proposição é falsa para q e z arbitrários.

Para obter os 2 pontos, a resposta deve exibir claramente algum contra-exemplo válido.