Exame Final – Variáveis Complexas – MA044 – 10 de julho de 2024

- *Esta prova contém 6 questões dissertativas, cada uma valendo 2 pontos. Serão consideradas na correção suas 5 melhores questões. Não é necessário entregar esta folha de questões.*
- *Identifique-se claramente na folha de respostas.* **Não entregue seus rascunhos.**
- *A resolução comentada será enviada por e-mail logo após o final da prova. As notas serão divulgadas o mais rápido possível no site do curso:* `http://vigo.ime.unicamp.br/ma044`

1. (2 Pontos) Calcule as somas $A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n}$ e $B = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$, $n > 1$.
   (Dica: explore a fórmula de Euler.)

   Solução. *Ambas as somas são nulas. Notem que $A + iB = S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}}$. S é a soma de uma PG de razão $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ e portanto, como discutimos amplamente em aula, temos*

   $$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) S = 1 - e^{2\pi i} = 0.$$

   Como $e^{\frac{2\pi i}{n}} \neq 1$ para $n > 1$, o resultado segue diretamente.

2. (2 Pontos) Considere a seguinte proposição:

   > Seja $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. A função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, com e u e v harmônicas reais ($\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$) é analítica.

   Prove-a se for verdadeira, ou de um contra-exemplo se for falsa.

   Solução. *Esta proposição é falsa, como também foi discutido amplamente em aula. A condição de u e v harmônicas reais é uma condição necessária, mas não suficiente para termos $f(z)$ analítica. Contra-exemplo mais simples: $u = x$, $v = 0$.*

3. (2 Pontos) A função $W(z)$ de Lambert é definida como sendo a inversa da função $f(z) = ze^z$, $z \in \mathbb{C}$. Calcule explicitamente pelo menos um dos valores correspondentes a $W\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

   Solução. *Esta questão também foi discutida em aula, e foi tema de um teste de uma disciplina anterior. Pela definição da função, $W(x) = z$ é tal que $x = ze^z$. Seja $z = a + ib$. Temos*

   $$x = ze^z = (a + ib)e^{a+ib} = e^a\left(a\cos b - b\sin b\right) + ie^a\left(b\cos b + a\sin b\right).$$

   Assim, $W\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ corresponde a

   $$-\frac{\pi}{2} = e^a\left(a\cos b - b\sin b\right) + ie^a\left(b\cos b + a\sin b\right),$$

   que tem como solução mais simples $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$. Portanto, $W\left(-\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\pi}{2}$ é o valor mais simples.

4. (2 Pontos) Determine o(s) polo(s) da função $f(z) = \left(\frac{\cos z}{\sin z}\right)^2$ e seu(s) respectivo(s) resíduo(s).

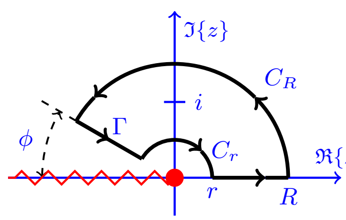
Solução. *Esta questão é uma variação simples do exemplo 2 da seção 76 e da questão 4 da P3. Os polos estão sobre a reta real, em $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Dada a periodicidade da função, basta inspecionar o polo $z = 0$. Temos*

$$f(z) = \left(\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots}\right)^2.$$

Todas as potências dentro do parêntesis são pares. Portanto, a série de Laurent final terá $c_{-1} = 0$, implicando que os resíduos são todos nulos.

5. (2 Pontos) Calcule a integral $\int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2+1}$.

Solução. *Vamos considerar a função $f(z) = \frac{z^{\frac{1}{n}}}{z^2+1}$, pegando o ramo principal da radiciação, e o contorno abaixo, evitando a linha de corte em $\mathrm{Arg}(z) = \pi$ e o ponto de ramificação da origem.*



Os dois únicos polos de $f(z)$ são $z = \pm i$. O resíduo no polo englobado pelo contorno é $\mathrm{Res} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2n}}}{2i}$. A integral em todo o contorno será

$$\oint f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res} = \pi e^{\frac{\pi i}{2n}}.$$

Vamos agora detalhar o contorno:

$$\begin{aligned}\oint f(z)dz &= \int_r^R f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz + \int_{C_r} f(z)dz \\ &= \int_r^R \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2+1}dx + \int_{C_R} f(z)dz - e^{i(\pi-\phi)}\int_r^R \frac{\left(e^{i(\pi-\phi)}x\right)^{\frac{1}{n}}}{e^{2i(\pi-\phi)}x^2+1}dx + \int_{C_r} f(z)dz.\end{aligned}$$

Os limites que nos interessam são $\phi \to 0$, $r \to 0$, and $R \to \infty$. Tomando-se o primeiro limite, temos

$$\oint f(z)dz = \left(1 + e^{\frac{\pi i}{n}}\right)\int_r^R \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2+1}dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_r} f(z)dz.$$

A integral no semicírculo externo se anula no limite $R \to \infty$ (Lema de Jordan). A integral no semicírculo interno também se anula para $r \to 0$, pois

$$\int_{C_r} f(z)dz = -ir^{1+\frac{1}{n}}\int_0^\pi \frac{e^{\frac{i\theta}{n}}}{r^2e^{2i\theta}+1}d\theta \Rightarrow \left|\int_{C_r} f(z)dz\right| \le \frac{\pi r^{1+\frac{1}{n}}}{1-r^2}$$

e ficamos finalmente com

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2+1} = \frac{\pi e^{\frac{\pi i}{2n}}}{1+e^{\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2n}}.$$

6. (2 Pontos) Determine e esboce a imagem do círculo unitário pela transformação $T(z) = \frac{z}{2+z}$.

Solução. *Se $w = T(z)$, temos*

$$z = \frac{2w}{1-w}$$

O círculo unitário é dado por $z\bar{z} = 1$. Sob a transformação $w = T(z)$, ele será mapeado em

$$\frac{4w\bar{w}}{(1-w)(1-\bar{w})} = 1 \Rightarrow w\bar{w} + \frac{1}{3}(w+\bar{w}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(w+\frac{1}{3}\right)\overline{\left(w+\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left|w+\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3},$$

que corresponde a um círculo com centro em $w = -\frac{1}{3}$ e raio $\frac{2}{3}$. O esboço vai abaixo. Notem que $z = -1$ é um dos pontos fixos da transformação, $-1 = T(-1)$.