Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 6 (Último!!!) - MA 044 - Cursão, 13 de novembro de 2013.

Boa prova!

1. Calcule as integrais abaixo como vocês quiserem, mas eu recomendo que façam a partir de integrações no plano complexo. Considere todas as constantes não especificadas como reais e positivas.

(a) (2 Pontos - Bonus natalino!)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx$$

Solução. *Notem que a integral em questão é*

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{aix}}{b^2+x^2}\,dx.$$

Consideremos, então, a integral complexa

$$\oint_\Gamma \frac{e^{aiz}}{b^2+z^2}\,dz.$$

Os polos do integrando estão localizados em $z=\pm ib$ e seus residuos são, respectivamente, $\mp i\dfrac{e^{\mp ab}}{2b}$. Escolhendo-se um caminho Γ composto por Γ_1: integral sobre a reta real, $[-R,R]$ e Γ_2: semicírculo de raio R, centrado na origem, percorrido no sentido anti-horário. A integral será $2\pi i\,\mathrm{Res} = 2\pi\dfrac{e^{-ab}}{2b}$. Notem que

$$\left|\int_{\Gamma_2}\frac{e^{aiz}}{b^2+z^2}\,dz\right| = R\left|\int_0^\pi \frac{e^{-aR\sin\theta}e^{aiR\cos\theta}}{b^2+R^2e^{2i\theta}} ie^{i\theta}\,d\theta\right| \le R\left|\int_0^\pi \frac{e^{-aR\sin\theta}}{|b^2+R^2e^{2i\theta}|}\,d\theta\right|$$

No limite de $R\gg b$, temos

$$\left|\int_{\Gamma_2}\frac{e^{aiz}}{b^2+z^2}\,dz\right| \le \frac{R}{R^2-b^2}\left|\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}\,d\theta\right| \le \frac{R}{R^2-b^2}\pi e^{-aR},$$

de onde se ve que esta integral se anula no limite $R\to\infty$, dando finalmente o resultado

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{2b}$$

(b) (5 Pontos)

$$\int_0^{2\pi} \cos a(\cos n\theta)\,d\theta, \quad (n \text{ inteiro})$$

Solução. *O caso $n=0$ é trivial. Lembrando que $z^n=\rho^n e^{in\theta}=\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, temos que $\cos n\theta = \dfrac{z^n+z^{-n}}{2}$, com $|z|=1$. Como $dz = izd\theta$, temos*

$$\int_0^{2\pi}\cos 2a(\cos n\theta)\,d\theta = -i\oint \cos\left(az^n+az^{-n}\right)\frac{dz}{z},$$

sendo o caminho de integração o círculo unitário percorrido na direção anti-horária. (Sem perda de generalidade, fizemos $a \to 2a$ para facilitar as expressões). O único polo (essencial, de fato), é a origem. Temos

$$\int_0^{2\pi} \cos 2a(\cos n\theta)\, d\theta = 2\pi \mathrm{Res}\left(z^{-1}\cos\left(az^n + az^{-n}\right), z = 0\right).$$

Vamos determinar a série de Laurent do integrando:

$$z^{-1}\cos\left(az^n + az^{-n}\right) = z^{-1}\left(\cos az^n \cos az^{-n} - \sin az^n \sin az^{-n} =\right)$$

$$\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{k+m}\frac{a^{2(k+m)}}{(2k)!(2m)!}z^{2n(k-m)} - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{k+m}\frac{a^{2(k+m+1)}}{(2k+1)!(2m+1)!}z^{2n(k-m)}\right)$$

O resíduo (coeficiente b_{-1} da série de Laurent) corresponde aos termos com $k = m$ entre parêntesis:

$$b_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^{2k}}{(2k)!}\right)^2 - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{a^k}{k!}\right)^2.$$

Por curiosidade, esse valor é $J_0(a)$, sendo J_0 uma das "famosas" funções de Bessel. Finalmente

$$\int_0^{2\pi} \cos 2a(\cos n\theta)\, d\theta = 2\pi J_0(a) = 2\pi\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{a^m}{m!}\right)^2.$$

Notem que o resultado não depende de n! Pergunta: e se n fosse real? Poderíamos calcular a integral com o contorno que usamos para n inteiro?

(c) (5 Pontos)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}\sin bx}{1+e^{cx}}\, dx, \quad (a < c)$$

Solução. *Notem inicialmente que*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}\sin bx}{1+e^{cx}}\, dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(a+ib)x}}{1+e^{cx}}\, dx\right)$$

Vamos considerar a integral complexa

$$\oint_{\Gamma}\frac{e^{(a+ib)z}}{1+e^{cz}}\, dz.$$

Os polos do integrando são os pontos $z = \frac{(2n+1)\pi}{c}i$, $n \in \mathbb{Z}$. Vamos escolher o caminho Γ da seguinte maneira:

- Γ_1*: ao longo do eixo real, $-L \leq x \leq L$*
- Γ_2*: ao longo da reta vertical, $x = L$, $0 \leq y \leq \frac{2\pi}{c}$*
- Γ_3*: ao longo da reta horizontal $y = \frac{2\pi}{c}$, percorrendo de $x = L$ até $x = -L$*
- Γ_4*: ao longo de reta vertical $x = -L$, de $y = \frac{2\pi}{c}$ até $y = 0$*

Este caminho engloba apenas um polo ($z = \frac{i\pi}{c}$), cujo resíduo é $-\frac{1}{c}e^{\frac{a+ib}{c}i\pi}$. A integral ao longo de Γ_3 é

$$-e^{\frac{a+ib}{c}2\pi i}\int_{-L}^{L}\frac{e^{(a+ib)z}}{1+e^{cz}}dz.$$

As integrais ao longo de Γ_2 e Γ_4 se anulam no limite de $L \to \infty$ (mostrem!), dando finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(a+ib)x}}{1+e^{cx}}\, dx = -\frac{\frac{2\pi i}{c}e^{\frac{a+ib}{c}i\pi}}{1-e^{\frac{a+ib}{c}2\pi i}} = \frac{\pi}{c\sin z_0}, \quad z_0 = \pi\left(\frac{a}{c} + i\frac{b}{c}\right)$$

Como

$$\sin z_0 = \sin \pi \frac{a}{c} \cosh \pi \frac{b}{c} + i \cos \pi \frac{a}{c} \sinh \pi \frac{b}{c}$$

temos finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(a+ib)x}}{1+e^{cx}}\, dx = \frac{\pi}{c} \frac{\sin \pi \frac{a}{c} \cosh \pi \frac{b}{c} - i \cos \pi \frac{a}{c} \sinh \pi \frac{b}{c}}{\sin^2 \pi \frac{a}{c} + \sinh^2 \pi \frac{b}{c}}$$

de onde se obtem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} \sin bx}{1+e^{cx}}\, dx = -\frac{\pi}{c} \frac{\cos \pi \frac{a}{c} \sinh \pi \frac{b}{c}}{\sin^2 \pi \frac{a}{c} + \sinh^2 \pi \frac{b}{c}}$$

e (gratuitamente)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} \cos bx}{1+e^{cx}}\, dx = \frac{\pi}{c} \frac{\sin \pi \frac{a}{c} \cosh \pi \frac{b}{c}}{\sin^2 \pi \frac{a}{c} + \sinh^2 \pi \frac{b}{c}}$$