Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 4 - MA 044 - Cursão, 14 de outubro de 2013.

Boa prova!

1. (5 Pontos) Seja $f(z) = z^3 + z$. Calcule os possíveis valores para a integral

$$I_\Gamma = \oint_\Gamma \frac{ds}{f(s)},$$

sendo Γ uma curva fechada, suave por partes, sem auto-intersecções, orientada no sentido anti-horário e que não passa pelos eventuais polos do integrando.

Solução. $f(z) = z(z+i)(z-i)$. *O integrando tem polos simples em* $z = 0$, $z = i$ *e* $z = -i$. *Chamaremos estes polos de 1, 2 e 3. A fórmula integral de Cauchy para um caminho que envolva o polo 1 será:*

$$I_1 = \oint \frac{f_1(s)}{s} ds = 2\pi i f_1(0),$$

com $f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}$. *Portanto,* $I_1 = 2\pi i$. *Por outro lado,*

$$I_2 = \oint \frac{f_2(s)}{s-i} ds = 2\pi i f_2(i) = -\pi i,$$

já que $f_2 = \frac{1}{z(z+i)}$. *De maneira análoga,* $I_3 = -\pi i$. *Os possíveis valores para a integral são*

$$I_\Gamma = \sum_j I_j,$$

sendo o somatório tomado sobre os polos englobados por Γ.

2. (5 Pontos) Use seus conhecimentos de integração no plano complexo para calcular a integral imprópria

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Solução.

$$I = \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{ds}{(s+i)^2(s-i)^2},$$

sendo $\Gamma = (x, 0), x \in \mathbb{R}$. *O integrando tem polos (duplos) nos pontos* $z = i$ *e* $z = -i$. *Fechando-se a integração com um semi-círculo "por cima", temos que*

$$I = \frac{1}{2} \oint \frac{ds}{(s+i)^2(s-i)^2},$$

já que a contribuição ao longo do semi-circulo se anula para $R \to \infty$. *Sabemos da fórmula integral de Cauchy para a derivada que*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds.$$

Para o nosso caso

$$\oint \frac{ds}{(s+i)^2(s-i)^2} ds = 2\pi i f'(i) = \frac{\pi}{2}$$

já que $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$. *Portanto,* $I = \frac{\pi}{4}$.