Nome: ________________________________ RA: ____________________

Teste 3 - MA 044 - Cursão, 16 de setembro de 2013.

Boa prova!

1. Determine **todos** os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

   (a) (1 Ponto) $\exp\left(z^3\right) = 1$.

   (b) (1 Ponto) $(\log \bar{z})^2 = -1$.

   (c) (1 Ponto) $\sqrt{\log z} = -1$.

   (d) (1 Ponto) $\cos \exp z = 0$.

   (e) (1 Ponto) $\exp \cos z = 1$.

   (f) (1 Ponto) $\exp \sin z = 0$.

   Solução.

   (a) (1 Ponto) $\exp z^3 = 1 \Rightarrow z^3 = \log 1 = 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow z^3 = 2n\pi \exp \pm i\frac{\pi}{2},\ 0 \le n \in \mathbb{Z},$
   $\Rightarrow z = \sqrt[3]{2n\pi} \exp i\left(\frac{2m\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}\right),\ 0 \le n \in \mathbb{Z}$ *e* $m = -1, 0, 1.$

   (b) (1 Ponto) $(\log \bar{z})^2 = -1 \Rightarrow \log \bar{z} = \pm i \Rightarrow z = e^{\mp i}.$

   (c) (1 Ponto) $\sqrt{\log z} = -1 \Rightarrow \log z = 1 \Rightarrow z = e.$

   (d) (1 Ponto) $\cos \exp z = 0 \Rightarrow \exp z = \frac{2n+1}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow \exp z = \pm\frac{2n+1}{2}\pi,\ 0 \le n \in \mathbb{Z}$
   $\Rightarrow z = \log \pm\frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow z = \log\left|\frac{2n+1}{2}\pi\right| + n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}.$

   (e) (1 Ponto) $\exp \cos z = 1 \Rightarrow \cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

   (f) (1 Ponto) $\exp \sin z = 0 \Rightarrow z = \emptyset.$

2. (4 Pontos) Considere a função $f(z) = \exp z^2$, definida no primeiro quadrante ($x \ge 0,\ y \ge 0$) do plano complexo. Descreva (vale esboços bem feitos) como esta função mapeia as semiretas horizontas e verticais do primeiro quadrante, incluindo, explicitamente, as retas $x = 0$ e $y = 0$.

   Solução. $f(z) = \exp\left(x^2 - y^2\right) \exp(2ixy)$

   A (semi)-reta $y = 0$ é mapeada como $f(z) = \exp x^2$, que corresponde a reta $y = 0$ e $x > 1$ na imagem de $f(z)$.

   A (semi)-reta $x = 0$ é mapeada como $f(z) = \exp -y^2$, que corresponde a reta $y = 0$ e $0 < x < 1$ na imagem de $f(z)$.

   A reta horizontal $y = y_0 > 0$ é mapeada na curva $f(z) = \exp\left(x^2 - y_0^2\right) \exp(2ixy_0)$, a qual corresponde a uma espiral comecando em $(\exp -y_0^2, 0)$ e com o raio aumentando (rapidamente!) no sentido anti-horário.

   A reta vertical $x = x_0 > 0$ é mapeada na curva $f(z) = \exp\left(x_0^2 - y^2\right) \exp(2ix_0 y)$, a qual corresponde a uma espiral comecando em $(\exp x_0^2, 0)$ e com o raio diminuindo (rapidamente!) no sentido anti-horário.