Nome: ______________________________ RA: ____________________

Teste 2 - MA 044 - Cursão, 2 de setembro de 2013.

Boa prova!

1. Para as funções abaixo, calcule seu limite para $z \to 0$ ou mostre que ele não exite.

   (a) (1 Ponto) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$

   (b) (1 Ponto) $f(z) = \sqrt{\bar{z}}$

   (c) (1 Ponto) $f(z) = \frac{\bar{z}+1}{z}$

   (d) (1 Ponto) $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$

   Solução. *Seja $z = \rho e^{i\theta}$. Os limites existirão se para $\rho \to 0$, $f(z)$ não depender de θ.*

   (a) (1 Ponto) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$: limite não existe. Temos $f(z) = e^{-2i\theta}$, que não tem limite único para $z \to 0$ ($\rho \to 0$).

   (b) (1 Ponto) $f(z) = \sqrt{\bar{z}}$: limite existe e é zero. Temos $f(z) = \sqrt{\rho}e^{-i\theta/2}$, de onde se tem que $f(z) \to 0$ para $\rho \to 0$, para qualquer θ.

   (c) (1 Ponto) $f(z) = \frac{\bar{z}+1}{z}$: limite existe e é ∞. Temos $f(z)^{-1} = z/(\bar{z}+1)$, de onde se tem que $f(z)^{-1} \to 0$ para $z \to 0$.

   (d) (1 Ponto) $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$: limite não existe. (Lembrem-se, esta função é aquela cuja versão real (com $f(0) = 0$)é C^∞, mas que não tem série de Taylor na origem). Temos $f(z) = \exp\left(-\frac{e^{-2i\theta}}{\rho^2}\right)$, que não tem limite único para $\rho \to 0$. (Compare, por exemplo, o valor obtido para $\theta = 0$ e para $\theta = \pi/2$).

2. Considere as afirmações abaixo. Prove as verdadeiras e de um contra-exemplo para as falsas.

   (a) (2 Pontos) Se $f(z)$ é analítica e $f(z) = \overline{f(z)}$, então $f(z)$ é constante.
   Solução. *Verdadeira. Se $f = u + iv$ é analítica, então valem as condições de Cauchy-Riemann (CR)*

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

   Se $f = \bar{f}$, $v = 0$. Porem, das condições de CR, segue que u é constante, portanto f é constante.

   (b) (2 Pontos) Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ duas funções reais harmônicas ($\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$). A função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $z = x + iy$, é analítica.

   Solução. *Falsa. Contra-exemplo: pelo item anterior, $v = 0$ e u harmônica não constante. Está faltando a condição de perpendicularidade entre as curvas de nível, como foi discutido várias vezes em aula...*

   (c) (2 Pontos) Um ponto fixo $z_* \in \mathbb{C}$ de uma transformação $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um ponto tal que $f(z_*) = z_*$. A transformação de Moebius

   $$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $ad - bc \neq 0$, tem sempre um único ponto fixo.

Solução. *Falsa. A inversão $f(z) = z^{-1}$ é uma transformação de Moebius ($b = c = 1$, $a = d = 0$) e tem dois pontos fixos $z = \pm 1$. A translação $f(z) = z + b$, $b \neq 0$, é uma outra transformação de Moebius, e esta NÃO tem pontos fixos. (Diz-se que seus pontos fixos estão no ∞). Em geral, a transformação de Moebius tem 2 pontos fixos (mostrem!).*

3. (Bonus: 2 Pontos) Mostre que se $ad - bc = 0$ no item anterior, com c e d não nulos simultaneamente, $f(z)$ será constante (e portanto, não será uma transformação no sentido de ser uma bijeção entre regiões do plano complexo.)

Solução. *Consideremos primeiro o caso $d = 0$. Este caso exige $c \neq 0$ e, portanto, se $b = 0$, $f(z) = a/c$. Se $b = 0$, há duas possibilidades: $a = 0$, que corresponde a $f = 0$, ou $d = 0$, que corresponde a $f(z) = a/c$. Se $d \neq 0$ e $b \neq 0$, temos*

$$f(z) = \frac{adz + db}{cbz + db} = 1$$

se $ad - bc = 0$.