Nome: ____________________________________ RA: ______________________

Teste 1 - MA 044 - Cursão, 19 de agosto de 2013.

Boa prova!

1. (5 Pontos) Mostre que a equação da reta que passa por dois pontos distintos z_1 e z_2 do plano complexo $\mathbb{C}$ pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Solução. *O determinante é dado por*

$$z\bar{z}_1 + z_2\bar{z} + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}z_1 - \bar{z}_2 z - \bar{z}_1 z_2 = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z - (z_1 - z_2)\bar{z} + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 2i\Im\left[(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z + z_1\bar{z}_2\right].$$

($2i\Im z = z - \bar{z}$.) Supondo $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z = x + iy$, temos $\Im\left((\bar{z}_1 - \bar{z}_2)z\right) = (x_1 - x_2)y - (y_1 - y_2)x$ e $\Im(z_1\bar{z}_2) = x_2y_1 - x_1y_2$. A equação será, portanto,

$$(x_1 - x_2)y - (y_1 - y_2)x + x_2y_1 - x_1y_2 = 0,$$

que corresponde a reta que passa pelos pontos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

Solução alternativa. *Usando as propriedades do determinante (que continuam válidas em $\mathbb{C}$, confiram!), temos:*

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+iy & x-iy & 1 \\ x_1+iy_1 & x_1-iy_1 & 1 \\ x_2+iy_2 & x_2-iy_2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+iy & x & 1 \\ x_1+iy_1 & x_1 & 1 \\ x_2+iy_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 2i\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Do último determinante, ve-se que se trata de uma equação linear em x e y e, portanto, de uma reta. Como o determinante é identicamente nulo nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), conclui-se que se trata da única reta que passa por eles.

2. (5 Pontos) Sejam z_1, z_2 e z_3 três pontos do plano complexo $\mathbb{C}$. Interprete geometricamente o valor absoluto do determinante

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solução. *Usando as propriedades do determinante, temos*

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & \bar{z}_2 - \bar{z}_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & \bar{z}_3 - \bar{z}_1 & 0 \end{vmatrix} = (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - (z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = 2i\Im\left[(z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)\right]$$

Supondo $z_k = x_k + iy_k$, *temos* $D = 2i\,[(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)] = 2iA$, *sendo* A *a área (orientada) do paralelogramo de lados* $\overrightarrow{z_1 z_3}$ *e* $\overrightarrow{z_1 z_2}$ *(comparem com o produto vetorial). Finalmente,* $|D|/2$ *é a área do paralelogramo com vértice nos tres pontos.*