Nome: ______________________________ RA: ____________________

Prova 2 - MA 044 - Cursão, 27 de novembro de 2013.

Boa prova!

1. Considere a função $f(z) = \text{cotan}\, z$ para os itens (a)-(c) abaixo.

   (a) (2 Pontos) Obtenha os dois primeiros termos de sua série de Laurent em torno de $z = 0$ e identifique seu raio de convergência.

   Solução. *Feito no exemplo da soma de séries no forum.*

   $$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + \cdots$$

   Raio de convergência: $0 < |z| < \pi$ *(limitado pelos polos de* $f(z)$*).*

   (b) (2 Pontos) Calcule $\oint_\Gamma f(z)\, dz$, sendo Γ o círculo unitário centrado na origem e percorrido no sentido anti-horário.

   Solução. *Único polo englobado é a origem, cujo resíduo (item anterior) é 1. O valor da integral será* $2\pi i$ *pelo teorema dos resíduos.*

   (c) Esboce possíveis caminhos Γ no plano complexo que englobem a origem e para os quais a integral $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ valha:

   i. (1 Ponto) $I = 0$,

   ii. (1 Ponto) $I = 3$,

   iii. (1 Ponto) $I = -3$.

   Solução. *Diversas possíveis soluções. Pelo princípio do argumento, essa integral deve ser* $Z - P$*, sendo* Z *e* P*, respectivamente, o número de zeros e polos, englobados pelo caminho, incluindo suas multiplicidades e ordens. Todos os zeros (*$z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$*) e polos (*$z = n\pi$*) são simples. Basta escolher um caminho que englobe o número adequados de zeros e polos para se ter a soma desejada (a origem já é um polo englobado, pelo enunciado). Também é possível escolher um caminho com auto-intersecções que de um certo número de voltas no sentido horário e outro no sentido anti-horario em torno de um polo, etc etc etc.*

2. (2 Pontos) Calcule $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b}\, dx$, com a e b positivos.

   Solução. *Foi o bônus natalino do teste 6. Muita gente está cometendo o mesmo erro exposto aqui pelo Vladmir. Inacreditável...* ☹

   $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b}\, dx = \frac{\pi e^{-a\sqrt{b}}}{2\sqrt{b}}$$

3. (2 Pontos) Calcule $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4+\cos\theta}$.

Solução. *Vejam o exemplo 10.9 ou o problema 10.D da lista do Prof. Mujica, apresentada no forum aqui.*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4+\cos\theta} = -2i \oint_\Gamma \frac{dz}{z^2+8z+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}$$

sendo Γ *o círculo unitário com a orientação usual*

4. (2 Pontos) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx,$$

para $a > 0$.

Solução. *Novamente, diversas soluções possíveis. A mais direta e usar o lemma de Jordam e calcular explicitamente o lado esquerdo, e comparar com o resultado obtido no Ex. 2. Pode-se tambem calcular a diferença das duas e mostrar que o integrando correspondente tem resíduo nulo no caminho pertinente, etc etc. Poderiam tambem usar the Feynman way:*

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2}\, dx = -\frac{d}{da} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx$$

e temos o resultado a partir do exercício 2 com $b = 1$. *Notem que o lado esquerdo é mais um caso de integral imprópria de Riemann que existe condicionalmente, quer dizer, converge sem convergir absolutamente. Pode-se fazer um curso inteiro de análise explorando-se este ponto...*