Nome: ______________________________ RA: ____________________

Prova 1 - MA 044 - Cursão, 30 de setembro de 2013.

Boa prova!

1. Para as funções abaixo, calcule seu limite para $z \to 0$ ou mostre que ele não exite.

   (a) (0.5 Ponto) $f(z) = \log\left(\frac{\bar{z}}{z} + 1\right)$

   (b) (0.5 Ponto) $f(z) = \sqrt{\exp \bar{z}}$

   (c) (0.5 Ponto) $f(z) = \frac{\bar{z}+z^2}{z+\bar{z}}$

   (d) (0.5 Ponto) $f(z) = \cos(z\bar{z})$

   Solução. *Seja $z = \rho e^{i\theta}$. Os limites existem se os resultados não dependerem de θ para $\rho \to 0$.*

   (a) $\lim_{\rho\to 0} \log\left(\frac{\bar{z}}{z} + 1\right) = \log\left(e^{-2i\theta} + 1\right)$, *logo o limite não existe.*

   (b) $\lim_{\rho\to 0} \sqrt{\exp \bar{z}} = \lim_{\rho\to 0} \sqrt{\exp\left(\rho e^{-i\theta}\right)} = \pm 1$.

   (c) $\lim_{\rho\to 0} \frac{\bar{z}+z^2}{z+\bar{z}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{-i\theta}+\rho e^{2i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{1}{e^{2i\theta}+1}$, *logo o limite não existe.*

   (d) $\lim_{\rho\to 0} \cos(z\bar{z}) = \lim_{\rho\to 0} \cos\rho^2 = 1$.

2. (2 Pontos) Mostre que $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$ é harmônica. Encontre a(as) função(ões) $v(x, y)$ para a(s) qual(is) $f = u + iv$ é analítica e escreva f como função de $z = x + iy$.

   Solução. $\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 2 - 2 = 0$, *logo u é harmônica. Para que $f = u + iv$ seja analítica, u e v devem satisfazer as condições de Cauchy-Riemman $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v$, $\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v$. A primeira equação implica $\frac{\partial}{\partial y}v = 2x + 2$, que tem como solução $v = 2xy + 2y + g(x)$, sendo $g(x)$ uma função arbitrária. A segunda condição de Cauchy-Riemman é neste caso $\frac{\partial}{\partial x}v = 2y$, de onde se tem $g(x) = g_0$ constante. Finalmente, a função analítica é $f = x^2 - y^2 + 2x + 1 + i(2xy + 2y + g_0) = z^2 + 2z + z_0$, com z_0 arbitrário tal que $\Re z_0 = 1$.*

3. Considere a integral $I = \oint \log z \, dz$, com $0 \le \arg z < 2\pi$. Calcule-a para os seguintes caminhos:

   (a) (1 Ponto) Círculo de raio R, centrado na origem e percorrido no sentido anti-horário.

   (b) (1 Ponto) Curva fechada envolvendo a origem, sem auto-intersecções, cruzando o eixo x positivo apenas no ponto $(x_1, 0)$.

   Solução.

   (a) $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$. $I = iR\int_0^{2\pi} (\log R + i\theta + 2in\pi)\, e^{i\theta} d\theta = 2i\pi R$. *Notem que* $\frac{d}{dz}(z\log z - z) = \log z$, *e a integral poderia tambem ser calculada a partir dos valores da primitiva em* $z = (R, 0)$ *e em* $z = (R, 2\pi)$.

   (b) Idêntico ao anterior com $R = x_1$. A diferença entre as duas integrais será um conjunto de integrais fechadas na região em que $\log z$ e analítica e, portanto, será nula.

4. Para os itens abaixo, considere a função $W(z)$ de Lambert, definida como sendo a inversa da função $f(z) = ze^z$, para $z \in \mathbb{C}$.

   (a) (1 Ponto) Caracterize a existência e unicidade de $W(x)$, como função real, para $x \in \mathbb{R}$.

   (b) (2 Ponto) Mostre que $W(x)$ existe, como função complexa, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$. Para cada valor de x, quantos valores de $W(x)$ complexos devemos esperar? Justifique.

   (c) (1 Ponto) Calcule explicitamente pelo menos um dos valores correspondentes a $W\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Solução.

(a) *Como funcão real, $W(x)$ é a inversa de $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Para $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$. $f(x)$ tem um mínimo global para $x = -1$ e $f(-1) = -1/e$. Do gráfico da função $f(x) = xe^x$, conclui-se que: para $x < -1/e$, $W(x)$ não está definida. Para $x = -1/e$, $W(x) = -1$. Para $-1/e < x < 0$, há dois possíveis valores para $W(x)$. Para $x \geq 0$, $W(x)$ tem valor único (em particular, $W(0) = 0$.)*

(b) *Pela definição, $W(x) = z$ tal que $x = ze^z$. Seja $z = a + ib$. Temos*

$$x = ze^z = e^a\left(a\cos b - b\sin b\right) + ie^a\left(b\cos b + a\sin b\right).$$

A primeira observação é que para $x = 0$, $a = b = 0$ é a única solução. Para que x seja real não nulo, precisamos que $a = -b\,\mathrm{cotan}\, b$ (supondo $b \neq 0$, caso contrário estamos no item anterior), que implica em

$$x = ze^z = -\frac{b}{\sin b}\exp\left(-b\,\mathrm{cotan}\, b\right).$$

Portanto, para $x \neq 0$, $W(x) = -b\,\mathrm{cotan}\, b + ib$, sendo b uma solução para a equação transcendental

$$-x\frac{\sin b}{b} = \exp\left(-b\,\mathrm{cotan}\, b\right).$$

Ocorre que esta equação para $x \neq 0$ tem **infinitas** *soluções. Como as duas funções de b nos dois lados da equação são pares, vamos nos restringir a $b \geq 0$. As soluções da equação transcendental correspondem aos encontros das curvas do lado direito e do lado esquerdo da equação. A do lado esquerdo, é uma senoide "amortecida", com zeros nos pontos $b = n\pi$, pontos nos quais o argumento da exponencial do lado direito diverge. Suponha $x < 0$ (o caso $x > 0$ é completamente análogo). Para $b \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$, $n \geq 1$, a função do lado esquerdo tem um único máximo e se anula nos extremos do intervalo. Neste mesmo intervalo, o argumento da exponencial vai de $-\infty$ a ∞, e portanto a função do lado direito vai de 0 a ∞, cruzando, necessariamente, com a função do lado esquerdo, implicando que há um zero para a equação transcendental em cada um dos intervalos $b \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$, $n \geq 1$.*

(c) *$W\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ corresponde a $z = a + ib$ tal que*

$$-\frac{\pi}{2} = e^a\left(a\cos b - b\sin b\right) + ie^a\left(b\cos b + a\sin b\right), \textit{que}$$

tem como solução mais simples $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$. Portanto, $W\left(-\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\pi}{2}$. A função W de Lambert tem inúmeras aplicações. Uma das mais curiosas vem da operação de iteração da exponenciação e seu limite infinito. Vejam tetration na wikipedia.