Nome: ______________________________ RA: ____________________

Prova 2 - MT401 (MS991) - Análise Aplicada, 30 de junho de 2016.

Faça as 5 questões. Sua nota será a soma das obtidas nas três primeiras, mais a melhor entre a 4 e 5. Boa prova!

1. O espaço de Besicovitch B^2 é o espaço formado a partir das funções suaves $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f g \, dx,$$

converge. Como usual, a construção deste espaço de Hilbert requer a identificação de classes de equivalências de vetores. Dois vetores f e g serão considerados idênticos em B^2 se $f - g = h \in \mathcal{N}(||\cdot||)$, *i.e.* $||h|| = 0$, sendo $||\cdot||$ a norma induzida pelo produto interno. Considere as seguintes questões sobre o espaço de Besicovitch B^2:

(a) (1 Ponto) Demonstre que $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}(||\cdot||)$. (Subconjunto próprio!)

Solução. $\mathcal{N}(||\cdot||) = \{f \in B^2 | \langle f, f\rangle = ||f||^2 = 0\}$. *Se* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \, dx < \infty$$

de onde segue diretamente que

$$\langle f, f \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f^2 \, dx = 0.$$

Basta mostrar agora que existem $f \in \mathcal{N}(||\cdot||)$ *tais que* $f \notin L^2(\mathbb{R})$. *Um exemplo é esta função*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|}},$$

para a qual

$$\int_{-T}^{T} f^2 \, dx = 2\log(1+T),$$

de onde temos diretamente que $f \notin L^2(\mathbb{R})$, *mas* $||f||^2 = \langle f, f\rangle = 0$ *e portanto* $f \in \mathcal{N}(||\cdot||)$.

(b) (1 Ponto) Demonstre que as famílias de vetores $f_\mu = \sin \mu x$ e $g_\nu = \cos \nu x$, com $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, formam um conjunto ortonormal, *i.e.*, $\langle f_\mu, f_\nu \rangle = \langle g_\mu, g_\nu\rangle = 0$ para $\mu \neq \nu$, e $\langle f_\mu, g_\nu \rangle = 0$ para todos μ e ν.

Solução. *Notem, inicialmente, que* $f_\mu = -f_{-\mu}$ *e* $g_\nu = g_{-\nu}$, *de tal maneira que para estudar a ortogonalidade destes vetores basta considerarmos* μ, ν *positivos* (μ *e* ν *nulos são triviais). Notem que*

$$e^{i(\mu-\nu)x} = e^{i\mu x}e^{-i\nu x} = \cos\mu x \cos\nu x + \sin\mu x \sin\nu x + i(\sin\mu x\cos\nu x - \sin\nu x \cos\mu x)$$

$$e^{i(\mu+\nu)x} = e^{i\mu x}e^{i\nu x} = \cos\mu x \cos\nu x - \sin\mu x \sin\nu x + i(\sin\mu x\cos\nu x + \sin\nu x \cos\mu x)$$

de onde temos que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\int_{-T}^{T} e^{i(\mu-\nu)x}\, dx + \int_{-T}^{T} e^{i(\mu+\nu)x}\, dx\right) = 2\langle g_\mu, g_\nu\rangle + 2i\langle f_\mu, g_\nu\rangle \qquad (1)$$

e

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\int_{-T}^{T} e^{i(\mu-\nu)x}\,dx - \int_{-T}^{T} e^{i(\mu+\nu)x}\,dx\right) = 2\langle f_\mu, f_\nu\rangle - 2i\langle f_\nu, g_\mu\rangle \tag{2}$$

Estas integrais, porém, são imediatas. Tem-se

$$\int_{-T}^{T} e^{i(\mu+\nu)x}\,dx = 2\frac{\sin(\mu+\nu)T}{\mu+\nu},$$

e se $\mu \neq \nu$,

$$\int_{-T}^{T} e^{i(\mu-\nu)x}\,dx = 2\frac{\sin(\mu-\nu)T}{\mu-\nu}.$$

de onde temos que os limites em (1) e (2) se anulam, implicando que todos os produtos internos em (1) e (2) também se anulam, o que prova a parte da ortogonalidade da questão.

Resta o caso $\mu = \nu$. Neste caso, temos

$$\int_{-T}^{T} e^{i(\mu-\nu)x}\,dx = \int_{-T}^{T} dx = 2T,$$

e calculando-se o limite temos $\langle f_\mu, f_\mu\rangle = \langle g_\mu, g_\mu\rangle = 1$ e $\langle f_\mu, g_\mu\rangle = 0$, o que mostra que de fato o conjunto é ortonormal.

(c) (1 Ponto) Demonstre que B^2 é não separável.

Solução. *Tome-se, por exemplo, o conjunto dos vetores f_μ do item anterior. Notem que $||f_\mu - f_\nu||^2 = \langle f_\mu - f_\nu, f_\mu - f_\nu\rangle = 2$ para $\mu \neq \nu$. Qualquer subconjunto denso M em B^2 deve conter elementos arbitrariamente próximos de f_μ e de f_ν, simultaneamente. Como f_μ e f_ν estão a uma distância fixa ($\sqrt{2}$), os elementos de M próximos a f_μ e f_ν serão diferentes. Como μ e ν tem a cardinalidade dos reais, os elementos de M terão a mesma cardinalidade, e portanto não há nenhum M contável denso em B^2, o que mostra sua não separabilidade.*

2. (2 Pontos) Seja $\{e_k\}$ um conjunto ortonormal total de um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$. Dá-se o nome de operador deslocamento (shift) a esquerda ao operador linear S tal que $Se_{k+1} = e_k$ para $k \geq 1$ e $Se_1 = 0$. Determine a imagem, o núcleo, a norma e o operador adjunto $S^\dagger$.

Solução. *Qualquer elemento v de $\mathcal{H}$ será escrito como*

$$v = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k e_k$$

A ação do operador S numa soma parcial de v é dada por

$$Sv_N = S\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k S e_k = \sum_{k=2}^{N}\alpha_k e_{k-1} = \sum_{\ell=1}^{N-1}\alpha_{\ell+1}e_\ell$$

para N arbitrário. Para todos os efeitos, consideramos sempre[1]

$$Sv = \lim_{N\to\infty} Sv_N, \tag{3}$$

[1] O livro não é cuidados neste ponto, mas (3) é necessário como definição dos operadores shift. É equivalente a hipótese de ser contínuo/limitado (por que?). Notem quem sem a hipótese de ser limitado/contínuo, não podemos comutar o limite com a ação de S, que é essencialmente o que está expresso em (3). TODOS que fizeram esta questão corretamente utilizaram esta condição implicitamente, e ganharam os pontos correspondentes, é claro! Mas fica o alerta!

de onde tem-se que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{span}(\{e_k\}) = \mathcal{H}$. *Notem também que* $Sv_N = 0$ *requer* $\alpha_k = 0$ *para todo* $k > 1$. *Portanto,* $\mathcal{N}(S) = \mathrm{span}(e_1)$. *O adjunto* $S^\dagger$ *é definido por* $\langle S^\dagger w_N, v_N\rangle = \langle w_N, Sv_N\rangle$ *para todos* $v, w \in \mathcal{H}$. *Neste caso, para* $w_N = \sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k$, *temos*

$$\langle w_N, Sv_N\rangle = \sum_{\ell=1}^{N-1} \bar{\beta}_\ell \alpha_{\ell+1} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \bar{\beta}_m \alpha_k \langle S^\dagger e_m, e_k\rangle = \langle S^\dagger v_N, v_N\rangle.$$

A igualdade para v_N, w_N *arbitrários requer:* $S^\dagger e_m = e_{m+1}$. *(O outro operador shift,* T*, do ex. 10 da seção 3.9 do livro). Para a norma do operador, considerem*

$$||Sv_N||^2 = \sum_{\ell=1}^{N-1} \alpha_{\ell+1}^2 \le ||v_N||^2 = \alpha_1^2 + \sum_{\ell=1}^{N-1} \alpha_{\ell+1}^2$$

para v_N *arbitrário, mostrando que o operador é limitado, quer dizer, existe* γ *tal que* $||Sv_N|| \le \gamma ||v_N||$. *A norma do operador é o menor valor possível de* γ. *Como* $||Se_{k+1}|| = 1 = ||e_{k+1}||$, *tem-se efetivamente* $||S|| = 1$.

3. Considere o operador linear A em ℓ^2 tal que $Ae_k = \sqrt{k}e_{k+1}$, sendo $\{e_k\}$ o conjunto ortonormal usual de ℓ^2 (e_k possui todas as entradas nulas, exceto a k-ésima, que será 1).

   (a) (1 Ponto) Demonstre que A não é contínuo.

   Solução. *Basta, por exemplo, mostrar que não é limitado, isto é, não existe um valor de* γ *para o qual* $||Av|| \le \gamma ||v||$ *para todo* $v \in \ell^2$. *Ora, como* $||Ae_k|| = ||\sqrt{k}e_{k+1}|| = \sqrt{k}$, *para* $k > 0$ *inteiro arbitrário e com* $||e_k|| = 1$, *fica claro que o operador não é limitado, e portanto não será contínuo.*

   (b) (1 Ponto) Demonstre que o operador composto $A^\dagger A$ é auto-adjunto.

   Solução. *O operador composto é claramente simétrico*

   $$\langle w, A^\dagger Av\rangle = \langle Aw, Av\rangle = \langle A^\dagger Aw, v\rangle,$$

   para todo $v, w \in \mathcal{D}(A) \subset \ell^2$, *pela própria definição de adjunto. Porém, como mostrado no item anterior, este operador* **não** *é limitado, e portanto a condição de ser ou não auto-adjunto depende ainda das considerações dos domínios. Vamos determinar explicitamente quem é o operador composto. Primeiro, notem que o operador adjunto será tal que* $A^\dagger e_{k+1} = \sqrt{k}e_k$, *de onde tem-se* $A^\dagger A e_k = k e_k$, *de onde temos que* $\mathcal{D}(A^\dagger A) = \mathcal{D}((A^\dagger A)^\dagger) \subset \ell^2$, *já que o operador é, na prática, diagonal*[2].

4. (3 Pontos) Mostre que se a bola unitária de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é compacta, então $\mathcal{H}$ tem dimensão finita.

Solução. *Suponha que* $\dim(\mathcal{H}) = n$. *Neste caso, qualquer* $V = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ *na bola unitária de* $\mathcal{H}$, *sendo* $\{e_k\}$ *uma base ortonormal, é tal que* $|\alpha_k|^2 \le 1$, *para* $1 \le k \le n$. *A situação é idêntica ao* R^n, *e o teorema de Bolzano-Weierstrass pode ser invocado pra demonstrar a compacticidade da bola unitária.*

[2] Só agora percebi que a questão dos adjuntos de operadores não limitados não fazia parte do Capítulo 3, isso é material dos capítulo 4 e 10. Porém, esse assunto foi bastante comentado nas aulas e o problema é relativamente simples, portanto mantive este item da questão e fiz uma correção bastante generosa. Prometo que no exame verificarei com cuidado se as questões estão nos capítulos pertinentes!

Vamos agora mostrar que se $\dim(\mathcal{H}) = \infty$*, a bola é não compacta, o que implicará o resultado pretendido. Para o caso de dimensão infinita, existirá sempre uma seqüência infinita ortonormal de vetores* v_k *(não necessariamente total, o argumento não depende de* $\mathcal{H}$ *ser separável). Por construção, esta seqüência é tal que* $||v_k - v_\ell||^2 = \langle v_k - v_\ell, v_k - v_\ell \rangle = 2$*, para* $k \neq \ell$*, implicando que não será Cauchy e, portanto, não convergirá. A bola unitária, portanto, não pode ser compacta neste caso.*

5. (3 Pontos) Prove que todo espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, separável e de dimensão infinita, é isomorfo (preservando o produto interno) a ℓ^2.

   Solução. *O ponto fundamental aqui é o resultado do teorema 3.6-4 que garante que todo espaço de Hilbert separável tem uma base ortonormal contável (portanto, Schauder), ao contrário do que ocorria com os espaços de Banach. É um caso particular do teorema 3.6-5, que mostra que todos os espaços de Hilbert de mesma dimensão (de Hilbert) são isomorfos entre si. Bem, tendo uma base ortonormal contável, temos* $\mathcal{H} = \mathrm{span}(\{x_k\})$*. Seja* $\{e_k\}$ *a base usual do* ℓ^2*. O mapa* $Tx_k = e_k$ *é sobrejetor e preserva trivialmente os produtos internos, normas, etc, e portanto é um isomorfismo. Isto está provado no livro e deveria ser reproduzido aqui. Quem não o fez, apenas citou o teorema, não ganhou os pontos integralmente da questão.*