Exame de Qualificação – DMA/UNICAMP

MT401 - Análise Aplicada

22 de agosto de 2016

Instruções, leia com atenção:

- *O exame tem 6 questões, mas serão consideradas apenas suas 5 melhores soluções.*
- *Inicie a solução de cada questão em uma página nova, identificando claramente que questão está sendo resolvida. Procure ser claro na escrita. Não é necessário repetir o enunciado.*
- *Certifique-se de ter se identificado em todas as folhas que usar.*
- **Não entregue** *seus rascunhos.*
- *Não é necessário devolver esta folha de questões.*
- *O resultado final será divulgado na secretaria de Pós-Graduação. Um roteiro para a solução deste exame será divulgado em breve no endereço:* `http://analiseaplicada.wordpress.com/`

Boa prova!
A. Saa & Y. Bozhkov

---

1. A curva seno do topologista $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, definida como sendo o conjunto de pontos

$$\mathcal{S} = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < |x| \leq 1 \right\},$$

tem diversas propriedades interessantes. Determine, em particular, se $\mathcal{S}$ e seu fecho $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}^2$ são ou não conjuntos compactos.

Solução: *Em primeiro lugar, identifiquemos o fecho $\overline{\mathcal{S}}$ do seno do topologista. Será o menor subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ contendo inteiramente a curva. Em outras palavras, será a curva acrescida de todos seus pontos de acumulação. Obviamente, a fonte de problemas está em $x = 0$. É fácil mostrar que*

$$\overline{\mathcal{S}} = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : 0 < |x| \leq 1 \right\}.$$

Para $x \neq 0$, a curva é contínua e portanto contém seus pontos de acumulação. Para $x = 0$, qualquer ponto no segmento vertical $[-1, 1]$ será ponto de acumulação, já que para $|y| \leq 1$ arbitrário, para todo ε, existirá pelo menos um x tal que

$$x^2 + \left(y - \sin \frac{1}{x} \right)^2 < \varepsilon^2$$

(construa explicitamente quem é esse x em função de ε!)

Sabemos que $\mathcal{S}$ e $\overline{\mathcal{S}}$ são obviamente conjuntos limitados. Como $\overline{\mathcal{S}}$ é fechado por construção, então já sabemos que $\overline{\mathcal{S}}$ é compacto, usando o teorema de Bolzano-Weierstrass (ou o de Heine-Borel, se preferir).

Ocorre que $\mathcal{S}$ não é compacto, e talvez a maneira mais simples e direta de demonstrar este fato seja exibir uma seqüencia em $\mathcal{S}$ que não contém nenhuma subseqüencia convergente em $\mathcal{S}$. Uma seqüência assim é esta $\left(x_n, \sin\frac{1}{x_n}\right)$, com $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ para $n > 1$, a qual corresponde a $\left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, (-1)^n\right) \in \mathcal{S}$, que não tem nenhuma subseqüencia convergente em $\mathcal{S}$, pois se tivesse alguma, deveria convergir pra $(0,0) \in \mathcal{S}$. (Obviamente, a curva seno do topologista não é fechada em $\mathbb{R}^2$, caso contrário seria compacta, pois é trivialmente limitada.)

2. Considere $C^k[0,1]$, o espaço das funções com as k primeiras derivadas contínuas no intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que
   $$\rho(f) = ||f||_\infty + \left|\left|f'\right|\right|_\infty + \left|\left|f''\right|\right|_\infty + \cdots + \left|\left|f^{(k)}\right|\right|_\infty,$$
   para $f \in C^k[0,1]$, sendo $||\cdot||_\infty$ a norma do sup usual em $[0,1]$, é uma norma para $C^k[0,1]$.
   Solução: *Temos que mostrar que $\rho(f)$ satisfaz os axiomas de uma norma. Como sempre, o único ponto que requer algum cuidado é a desigualdade triangular. Contudo, analisando*
   $$\rho(f+g) = ||f+g||_\infty + \left|\left|f'+g'\right|\right|_\infty + \left|\left|f''+g''\right|\right|_\infty + \cdots + \left|\left|f^{(k)}+g^{(k)}\right|\right|_\infty,$$
   para $f, g \in C^k[0,1]$, podemos usar para cada aparição da norma do sup a desigualdade triangular, obtendo finalmente o resultado desejado
   $$\rho(f+g) \le \rho(f) + \rho(g).$$

   (b) O espaço $C^k[0,1]$, munido da norma do item anterior, é um espaço de Banach? Justifique.
   Solução: *Sim, será um espaço de Banach. Para demonstrar, mostraremos que toda a seqüência de Cauchy converge nesse espaço. Se $\{f_k\}$ é Cauchy, então pra todo ε existirá um n tal que para para todo $m > n$ e teremos*
   $$\rho(f_n - f_m) < \varepsilon.$$
   Isto implica diretamente que
   $$||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon, \quad \left|\left|f_n' - f_m'\right|\right|_\infty < \varepsilon, \quad \ldots, \quad \left|\left|f_n^{(k)} - f_m^{(k)}\right|\right|_\infty < \varepsilon$$
   Cada uma dessas desigualdades corresponde a uma seqüência de Cauchy no espaço $C[0,1]$ usual, que é completo. Portanto, cada uma delas tem um limite que chamaremos de f, $\bar{f}'$, $\bar{f}''$, etc. Falta mostrar agora que $f' = \bar{f}'$ etc. Isto corresponde a mostrar que
   $$\bar{f}'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \tag{1}$$
   para todo $x \in [0,1]$. O operador $\frac{d}{dx}$ é sabidamente não contínuo em $C[0,1]$ (ver seção 2.7 do livro), então o resultado não é imediato. Porém, como sabemos que f_n' é contínua, podemos escrever sem perda de generalidade
   $$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(s)\,ds$$

Assim, o último termo entre parêntesis em (1) será

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\left(f_n(0) + \int_0^x f_n'(s)\,ds\right) = f(0) + \int_0^x \bar{f}'(s)\,ds,$$

onde usamos o fato do operador integral ser limitado e portanto contínuo em $C[0,1]$. O teorema fundamental do cálculo em (1) nos dará finalmente $f' = \bar{f}'$, como procurávamos. O mesmo argumento pode ser usado para todas as outras derivadas.

(Dica: você pode usar o fato de que $C[0,1]$ munido da norma do sup é completo.)

3. Seja $c_0 \subset l^\infty$ o subespaço das seqüências limitadas $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, munido da norma do sup usual $||\cdot||_\infty$ para seqüências.

   (a) Mostre que c_0 é um espaço de Banach.

   Solução: *Segue diretamente do exemplo 1.5-3 do Kreyszig.*

   (b) c_0 é separável?

   Solução: *Sim. Ser separável significa que existe um subconjunto contável denso. O subconjunto em questão é o subespaço c_{00} sobre $\mathbb{Q}$, i.e., as sequëncias racionais limitadas que terminam em $0, 0, 0, \dots$. A solução é análoga a do problema 1.3-10 do livro.*

   (c) Identifique quem é seu espaço dual c_0'.

   Solução:*Devemos identificar quem é o funcional linear f limitado mais geral que podemos escrever em c_0. Note que como c_0 é separável, um $x \in c_0$ arbitrário pode sempre ser escrito como*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

com todo os alertas pertinentes ao limite desse somatório, sendo e_i a base de Schauder usual do espaço das seqüências e x_k uma sucessão de números tais que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Como f é contínuo, teremos

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \gamma_k,$$

sendo $\gamma_k = f(e_k)$. O funcional linear limitado f mais geral é determinado, portanto, pela seqüencia $\{\gamma_k\}$. Vamos mostra que de fato essa é uma seqüência de ℓ^1, o que estabelecerá nosso resultado procurado $c_0' = \ell^1$. Note que

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \gamma_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||\gamma_k| \le ||x||_\infty ||\gamma||_1.$$

Até aqui, vimos que $\gamma \in \ell^1$ é suficiente para garantir que $f(x)$ seja limitado. Em outras palavras, mostramos que $c_0' \subseteq \ell^1$. Vamos agora mostrar que $\gamma \in \ell^1$ também é necessária. Considerem os seguintes elementos unitários $x^{(N)} \in c_0$:

$$x_k^{(N)} = \begin{cases} \text{sinal}(\gamma_k), & 1 < k \le N \\ 0, & k > N \end{cases}$$

Neste caso, teremos

$$\left|f\left(x^{(N)}\right)\right| = \sum_{k=1}^{N} |\gamma_k|$$

e evidentemente para que $f\left(x^{(N)}\right)$ seja limitado pra todo N, o somatório deve ser finito para todo N, implicando que $\gamma \in \ell^1$. A propósito, a norma de f será

$$||f|| = \sup_{x\in c_0} \frac{|f(x)|}{||x||_\infty} \leq ||\gamma||_1$$

para x não nulo, e o resultado anterior nos diz que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left|f\left(x^{(N)}\right)\right| = ||\gamma||_1,$$

de onde temos que $||f|| = ||\gamma||_1$.

4. Seja T um operador linear, limitado e auto-adjunto em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ **complexo**. Demonstre que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$|\langle x, (T-\lambda)x\rangle| \geq |\mathrm{Im}(\lambda)|||x||^2,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Suponha agora que para um certo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, valha a igualdade para todo $x \in \mathcal{H}$. O que se pode concluir sobre T nesse caso?

Solução: *Primeira parte:*

$$\langle x, (T-\lambda)x\rangle = \langle x, Tx\rangle - [\mathrm{Re}(\lambda) + i\mathrm{Im}(\lambda)]\,||x||^2$$

Como T é auto adjunto, temos $\langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle}$, de onde temos que

$$\mathrm{Re}\left(\langle x, (T-\lambda)x\rangle\right) = \langle x, Tx\rangle - \mathrm{Re}(\lambda)||x||^2, \quad \mathrm{Im}\left(\langle x, (T-\lambda)x\rangle\right) = -\mathrm{Im}(\lambda)||x||^2$$

e o resultado segue diretamente. Para segunda parte, a condição é equivalente a

$$\mathrm{Re}\left(\langle x, (T-\lambda_0)x\rangle\right) = \langle x, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]x\rangle = 0$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Isto implica que T é o operador multiplicação por $\mathrm{Re}(\lambda_0)$. Para demonstrar, notem que se a igualdade vale para $x \in \mathcal{H}$ arbitrário, então valerá para $x = y + iz$, com $y, z \in \mathcal{H}$ também arbitrários. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\langle y+iz, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]y+iz\rangle = 0 \quad &= \quad \langle y, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]y\rangle + i\langle y, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]z\rangle - i\langle z, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]y\rangle + \langle z, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]z\rangle \\
&= \quad i\langle y, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]z\rangle - i\langle [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]z, y\rangle \\
&= \quad 2i\langle y, [T-\mathrm{Re}(\lambda_0)]z\rangle
\end{aligned}$$

para y e z arbitrários, que implica em $Tz = \mathrm{Re}(\lambda_0)z$ para todo $z \in \mathcal{H}$.

5. Considere o operador linear $T : \ell^\infty \to \ell^p$, com $p \geq 1$, dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \to \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, \dots\right).$$

   (a) O operador T é contínuo para algum p? Justifique.

   Solução: *Ele é contínuo para todo $p \geq 1$, pois é limitado:*

$$||Ty||_p \leq ||y||_\infty \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}}} = \sqrt[p]{\frac{1}{2^p - 1}}||y||_\infty,$$

   para todo $p \geq 1$.

(b) A imagem $T(\ell^\infty)$ é um conjunto fechado em ℓ^p para algum p? Justifique.

Solução: *A imagem não será fechada para nenhum p. Mostraremos que que $T(\ell^\infty) \subset \ell^p$ não possui todos seus pontos de acumulação. Iniciemos considerando este elemento*

$$z = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \cdots\right) \in \ell^p$$

para todo $p \geq 1$. Considere agora a seqüência $\{z_n\} \in \ell^p$, sendo z_n o elemento cujas n primeiras entradas são as mesmas que as de z, e as seguintes são todas nulas. Note que $z_n \in T(\ell^\infty)$, já que $z_n = Ty_n$, com

$$y_n = \left(2, 1, \frac{2^3}{3^2}, \ldots, \frac{2^k}{k^2}, 0, 0, 0, \ldots\right) \in \ell^\infty$$

Alem disso, $\{z_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em ℓ^p, pois seu limite é z, que não pode pertencer a $T(\ell^\infty)$, já que sua pré-imagem $z = Ty$ corresponderia ao elemento

$$y = \left(2, 1, \frac{2^3}{3^2}, \frac{2^4}{4^2}, \ldots\right) \notin \ell^\infty$$

(c) O operador T é uma contração para algum p? Justifique.

Solução: *Este item permite duas interpretações, e as duas serão aceitas. A primeira, que era a esperada e talvez a mais rigorosa, envolve a definição usual de contração: um operador $T : X \to X$ com norma menor que 1. Nesse caso, teríamos que restringir o operador a $\ell^p \subset \ell^\infty$, e considerarmos $T : \ell^p \to \ell^p$. Neste caso, teremos*

$$||Tx||_p \leq \frac{1}{2}||x||_p$$

de onde teríamos já que $||T||_p \leq \frac{1}{2}$ (de fato, vale a igualdade), e portanto T seria uma contração pra qualquer p.

A outra possibilidade de interpretação, ainda que um tanto criticável por envolver espaços e normas diferentes, seria considerar $T : \ell^\infty \to \ell^p$. Do item a, temos neste caso

$$||T|| = \sup_{x \in \ell^\infty} \frac{||Tx||_p}{||x||_\infty} \leq \sqrt[p]{\frac{1}{2^p - 1}}.$$

Aplicando T para o elemento $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$ temos $||T|| = \sqrt[p]{\frac{1}{2^p-1}}$. Para $p > 1$, T é uma contração se considerado como $T : \ell^\infty \to \ell^p$.

6. Seja T o operador linear $T : D \to \ell^2$ definido como $Te_k = ke_k$, sendo e_k a base de Schauder usual de ℓ^2 e $\mathrm{Dom}(T) = D \subseteq \ell^2$.

(a) Mostre que T não é contínuo se $D = \ell^2$.

Solução: *Como operador $T : \ell^2 \to \ell^2$, T não é limitado, já que*

$$\frac{||Te_k||_2}{||e_k||_2} = k,$$

para todo $k > 1$, e portanto não será contínuo.

(b) Mostre que existe um subconjunto D denso em ℓ^2 para o qual $T : D \to \ell^2$ é contínuo.

Solução: *Considere $c_{00} \subset \ell^2$, conjunto cujos elementos terminam em 0 após uma certa entrada n, i.e. $x \in c_{00}$, então*

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0, 0, 0 \ldots)$$

Neste caso,

$$\frac{||Tx||_2}{||x||_2} \leq n$$

para todo $x \in c_{00} \subset \ell^2$ *não nulo, de onde temos que* T *é limitado quando definido com* $D = c_{00}$. *Ocorre que* $\overline{c_{00}} = \ell^2$, *exemplo 1.3-10 do livro do Kreyszig.*