Nome: ______________________________ RA: ____________________

Exame Final - MT401 (MS991) - Análise Aplicada, 14 de julho de 2016.

Faça as 5 questões. Sua nota será a soma das obtidas nas três primeiras, mais a melhor entre a 4 e 5. Boa prova!

1. Dá-se o nome de Cubo de Hilbert $\mathcal{CH} \subset \ell^2$ ao subconjunto das seqüências $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ tais que $|x_n| \leq \frac{1}{n}$. Introduzindo-se a métrica $d_2(x, y)$ induzida pela norma de ℓ^2, temos o espaço métrico $(\mathcal{CH}, d_2) \subset \ell^2$. Demonstre que $(\mathcal{CH}, d_2)$ é:

   (a) (1 Ponto) limitado (qual o seu diâmetro?);

   (Relembrando, o diâmetro de um espaço métrico (X, d) é dado por $\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(y, z) : y, z \in X\}$.)

   Solução. *Sejam $x, y \in \mathcal{CH}$. Tem-se*

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} \leq 2\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \infty,$$

   sendo que a primeira desigualdade nada mais é que a própria desigualdade triangular, e a segunda vem da definição do Cubo de Hilbert. O fato de haver um limite superior para $d_2(x, y)$ no Cubo de Hilbert, implica que este é limitado. Ademais, temos diretamente da definição de diâmetro

$$\operatorname{diam}(\mathcal{CH}) = 2\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

   A propósito, essa quantidade pode ser calculada explicitamente lembrando que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

   sendo $\zeta(z)$ a famosa função zeta de Riemann, o que nos dá

$$\operatorname{diam}(\mathcal{CH}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\pi.$$

   O cálculo de $\zeta(2)$ é o chamado problema da Basileia, resolvido por Euler, vejam o material aqui. (Obviamente, não era necessário calcular este valor, apenas mostrar que é finito.)

   (b) (1 Ponto) fechado;

   Solução. *Talvez a solução mais simples para este item seja mostrar que $\ell^2 \setminus \mathcal{CH}$ é um conjunto aberto, e este é o caso já que para todo $x \in \ell^2 \setminus \mathcal{CH}$, temos $|x_n| > \frac{1}{n}$, e portanto $\ell^2 \setminus \mathcal{CH}$ é uma união de abertos, e portanto aberto. (Obviamente, sabemos que ℓ^2 é completo.)*

   (c) (1 Ponto) e compacto.

   Solução. *Podemos mostrar, por exemplo, que toda seqüência em $\mathcal{CH}$ tem uma subseqüência convergente, i.e., $\mathcal{CH}$ é sequencialmente compacto, e a solução é idêntica à da questão 3 da P1.*

2. Considere o mapa linear $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) \to \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right).$$

(a) (1 Ponto) Mostre que T é limitado e calcule sua norma.

Solução. *Notem que*

$$||Tx||_\infty = \sup_{n>0}\left\{\frac{|x_n|}{n}\right\} \leq \sup_{n>0}\{|x_n|\} = ||x||_\infty,$$

para todo $x \in \ell^\infty$*, de onde tem-se que* T *é limitado. Aplicando-se* T *para* $x = (1, 0, 0, \dots)$*, temos que efetivamente* $||T||_\infty = 1$.

(b) (1 Ponto) Mostre que a imagem $T(\ell^\infty)$ não é um conjunto fechado em ℓ^∞.

Solução. *Podemos mostrar, por exemplo, que* $T(\ell^\infty)$ *não contém todos seus pontos de acumulação, i.e., vamos mostrar que existe uma seqüência de Cauchy* $x^{(k)} \in T(\ell^\infty)$ *cujo limite* $x^{(\infty)} \notin T(\ell^\infty)$*. Uma seqüencia assim é esta:*

$$x^{(k)} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, 0, \dots\right).$$

Esta seqüência pertence a $T(\ell^\infty)$*, é Cauchy, mas seu limite*

$$x^{(\infty)} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots\right)$$

não pode estar em $T(\ell^\infty)$*, já que sua pré-imagem corresponderia a*

$$T^{-1}\left(x^{(\infty)}\right) = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\right) \notin \ell^\infty.$$

3. (2 Pontos) Considere $C^1[a,b]$, o espaço das funções reais com derivada contínua no intervalo fechado $[a,b] \in \mathbb{R}$, munido da norma do sup usual $||\cdot||_\infty$. Este espaço é Banach? Justifique e prove, em particular, se este espaço é ou não fechado com relação a essa norma.

Solução. *Não há perda de generalidade em consideramos* $a = -1$ *e* $b = 1$*. (Se* $g(x) \in C^1[a,b]$ *,* $f(x) = g\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) \in C^1[-1,1]$*). Este espaço de funções satisfaz todos os axiomas de um espaço vetorial, e a norma do sup é obviamente uma norma neste espaço, portanto a única dúvida se será Banach ou não é a completeza do espaço com relação a norma do sup.*

Este espaço não é Banach por não ser completo, e a prova mais simples é exibir uma seqüência de Cauchy que não converge em $C^1[-1,1]$ *com a norma do sup. Não é complicado, basta encontrarmos uma seqüencia de Cauchy de funções diferenciáveis cujo limite é não diferenciável. Um exemplo é esta:*

$$f_n(x) = |x|^{\frac{n+1}{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Notem que são funções pares, portanto estarão em $C^1[-1,1]$ *se tiverem* $f'(x)$ *continua para* $x \geq 0$*, com* $f'(0) = 0$*. É o caso, já que*

$$f_n'(x) = \frac{n+1}{n}|x|^{\frac{1}{n}}.$$

Notem, já, que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x| \notin C^1[-1,1],$$

e portanto basta mostrar que $\{f_n(x)\}$ *é Cauchy para demonstrar que* $C^1[-1,1]$ *não é completo, e portanto não é Banach. Com este fim, considerem*

$$||f_n - f_m||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\left|x^{\frac{n+1}{n}} - x^{\frac{m+1}{m}}\right| \leq \sup_{x\in[0,1]}\left|x^{\frac{n+1}{n}} - x\right| + \sup_{x\in[0,1]}\left|x^{\frac{m+1}{m}} - x\right|,$$

onde usamos a desigualdade triangular. Vejam que a função $h_n(x) = x^{\frac{n+1}{n}} - x$ *é suave e tal que* $h_n(0) = h_n(1) = 0$*. Portanto, tem um ponto crítico* x_* *no intervalo* $(0,1)$*, que será tal que*

$$h_n'(x_*) = 0, \quad \Rightarrow \frac{n+1}{n}x_*^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \Rightarrow x_* = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Como o sup deve ocorrer em $x = x_*$, teremos

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| x^{\frac{n+1}{n}} - x \right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{2(n+1)},$$

onde usamos que a seqüência elementar $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente. Notem também que $x^{\frac{n+1}{n}} \geq x^{\frac{m+1}{m}}$ para $x \in [0,1]$ se $n > m$

Sem perda de generalidade, vamos supor $n > m$. Levando-se em conta os resultados acima, teremos finalmente

$$||f_n - f_m||_\infty \leq 2 \sup_{x\in[0,1]} \left| x^{\frac{m+1}{m}} - x \right| = \frac{1}{m+1},$$

para $n > m$, de onde vem que a seqüencia é de fato Cauchy.

4. Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach e $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ um operador linear e limitado. Considere que T é uma contração, *i.e.*, $||Tx|| < ||x||$ para todo $x \in \mathcal{B}$ não nulo.

   (a) (1 Ponto) Demonstre que o operador $(\mathbb{I} - T)$ é invertível, sendo $\mathbb{I}$ o operador identidade.

   Solução. *O operador $(\mathbb{I} - T)$ é claramente linear e limitado, portando será invertível se e somente se $\mathcal{N}(\mathbb{I} - T) = \{0\}$. Porém, notem que $(\mathbb{I} - T)x = 0 \Rightarrow x = Tx$. Tomando-se a norma e usando-se que T é uma contração, tem-se $||x|| = ||Tx|| < ||x||$, de onde temos que não existe nenhum $x \neq 0$ em $\mathcal{N}(\mathbb{I} - T)$.*

   (b) (2 Pontos) Mostre que

   $$\left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (T)^k\right) x = (\mathbb{I} - T)^{-1} x$$

   para todo $x \in \mathcal{B}$, sendo $(T)^n$ a enésima iteração do operador T, *i.e*, $(T)^n = \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{n \text{ vezes}}$.

   Solução. *Precisamos mostrar duas coisas. Primeiro, que existe o limite*

   $$A_\infty = \lim_{N\to\infty} A_N = \left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{N} (T)^k\right)$$

   no sentido de seqüência de operadores, e depois que este é o inverso de $(\mathbb{I} - T)$.

   Comecemos pelo primeiro ponto. Como T é uma contração, temos $||T|| = \gamma$, com $0 \leq \gamma < 1$. Notem que

   $$||A_N x|| = \left|\left|\left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{N} (T)^k\right) x\right|\right| \leq ||x|| + \sum_{k=1}^{N} ||(T)^k x|| \leq \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \gamma^k\right) ||x|| = \frac{1-\gamma^{N+1}}{1-\gamma} ||x||,$$

   de onde temos que A_N é limitado para **todos** *N. Em particular,*

   $$||A_\infty x|| \leq \frac{1}{1-\gamma} ||x||$$

   o que mostra que $||A_\infty||$ é também limitado e portanto está bem definido como um operador linear e contínuo. (Notem que a seqüência de operadores $\{A_N\}$ é Cauchy:

   $$||A_N x - A_M x|| = \left|\left|\sum_{k=M}^{N} (T)^k x\right|\right| \leq \left(\sum_{k=M}^{N} \gamma^k\right) ||x|| = \frac{\gamma^M - \gamma^{M+N+1}}{1-\gamma} ||x|| \leq \frac{\gamma^M}{1-\gamma} ||x||$$

para todo $x \in \mathcal{B}$, supondo como sempre $N > M$ sem perda de generalidade). Falta agora mostrar que se trata do inverso de $(\mathbb{I} - T)$. Para isto, notem que

$$A_N(\mathbb{I} - T) = \left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{N} (T)^k\right)(\mathbb{I} - T) = \left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{N} (T)^k\right) - \left(T + \sum_{k=1}^{N} (T)^{k+1}\right) = \mathbb{I} - (T)^{N+1}.$$

Tomando-se o limite $N \to \infty$ e levando-se em conta que T é uma contração, temos

$$A_\infty(\mathbb{I} - T)x = x$$

para todo $x \in \mathcal{B}$, que estabelece o resultado.

5. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear, limitado e auto-adjunto.

   (a) (1 Ponto) Mostre que se $\langle x, Tx \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, então $T = 0$.

   Solução. *Se $\langle x, Tx \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, então $\langle x + y, T(x + y) \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Porém, $\langle x + y, T(x + y) \rangle = \langle x, Tx \rangle + \langle x, Ty \rangle + \langle y, Tx \rangle + \langle y, Ty \rangle = \langle x, Ty \rangle + \langle y, Tx \rangle = 0$. Como T é auto adjunto, $\langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle$. Como o espaço é real, $\langle Ty, x \rangle = \langle x, Ty \rangle$, de onde temos finalmente que $\langle x + y, T(x + y) \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$ implica que $\langle x, Ty \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, mas este último equivale trivialmente a $T = 0$ (basta escolher, por exemplo, x como os elementos de uma base de $\mathcal{H}$).*

   (b) (2 Pontos) Mostre que o raio numérico do operador T, definido pela expressão

   $$r(T) = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{|\langle x, Tx \rangle|}{||x||^2} : x \in \mathcal{H} \right\},$$

   é uma norma no espaço $\mathcal{T}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ dos operadores $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, e que $r(T) \leq ||T||$, sendo $|| \cdot ||$ a norma induzida pelo produto interno de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{T}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

   Solução. *Demos mostrar que $r(T)$ satisfaz os axiomas de uma norma:*

   N1: $r(T) \geq 0$. *Decorre trivialmente da definição.*

   N2: $r(T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$. *Decorre do item 1.*

   N3: $r(\alpha T) = |\alpha| r(T)$. *Decorre trivialmente da definição e da linearidade do produto interno.*

   N4: *Desigualdade triangular: $r(T_1 + T_2) \leq r(T_1) + r(T_2)$. Como sempre, a única que oferece alguma dificuldade para ser provada. Tem-se*

   $$|\langle x, (T_1 + T_2)x \rangle| = |\langle x, T_1 x \rangle + \langle x, T_2 x \rangle| \leq |\langle x, T_1 x \rangle| + |\langle x, T_2 x \rangle|.$$

   Além disso, tem-se

   $$\sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{|\langle x, T_1 x \rangle|}{||x||^2} + \frac{|\langle x, T_2 x \rangle|}{||x||^2} \right\} \leq \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{|\langle x, T_1 x \rangle|}{||x||^2} \right\} + \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{|\langle x, T_2 x \rangle|}{||x||^2} \right\},$$

   de onde segue a desigualdade triangular.

   O último ponto decorre diretamente da desigualdade de Schwarz

   $$|\langle x, Tx \rangle| \leq ||x|| \cdot ||Tx||,$$

que nos leva a

$$r(T) = \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{|\langle x, Tx\rangle|}{||x||^2}\right\} \leq \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{||Tx||}{||x||}\right\} = ||T||$$

Na verdade, o raio numérico satisfaz esta desigualdade mais forte

$$\frac{1}{2}||T|| \leq r(T) \leq ||T||,$$

válidas para o caso real e complexo, mesmo se T não for auto-adjunto, o que mostra que, de certa maneira, $r(T)$ e $||T||$ são normas equivalentes. O raio numérico, assim como o chamado raio espectral, são muito uteis nos caso de dimensão finita, quer dizer, para matrizes. Veja mais aqui. Confiram também o teorema de Gershgorin.