MA141 - Prova 3
28/12/2012

1. (3,0) Associar cada equação (1-12) ao tipo de curva por ela descrita. Associações sem justificativa não serão aceitas e associações erradas serão penalizadas com -0.1 ponto.

(1)	$x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$		
(2)	$xy = -1$		
(3)	$x - y^2 = -2$	(a)	uma reta
(4)	$x^2 + 3xy + y^2 = 0$	(b)	elipse
(5)	$x^2 - xy = 0$	(c)	hipérbole
(6)	$x^2 + xy + y^2 = -1$	(d)	parábola
(7)	$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$	(e)	duas retas paralelas
(8)	$x^2 + 2xy + y^2 = 1$	(f)	um ponto
(9)	$x^2 = y^2$	(g)	conjunto vazio
(10)	$x^2 = 0$	(h)	duas retas concorrentes
(11)	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$		
(12)	$x^2 + 3y^2 + 2x = 0$		

(1) f; (2) c; (3) d; (4) h; (5) h; (6) g; (7) a; (8) e; (9) h; (10) a; (11) h; (12) b.

2. (2,0) As afirmações abaixo dizem respeito a dois conjuntos de três vetores linearmente independentes

$$V = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, W = \{\vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_5, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$$

de $\mathbb{R}^5$. Classifique-as como verdadeiras ou falsas exibindo exemplos ou contra-exemplos. Itens sem justificativa não serão considerados.

(a) (0,5) Pode-se sempre construir uma base de $\mathbb{R}^5$ juntando-se os três vetores de V com dois vetores quaisquer de W.

Falso. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$ não é LI, portanto não é base de $\mathbb{R}^5$.

(b) (0,5) A união $V \cup W$ gera $\mathbb{R}^5$.

Verdadeiro. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_5\} \subset V \cup W$ gera $\mathbb{R}^5$.

(c) (0,5) Tomando-se dois vetores quaisquer de V e um de W, tem-se sempre um conjunto LI.

Falso. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$ é LD.

(d) (0,5) Tomando-se dois vetores quaisquer de V e um de W, nunca temos um conjunto LI.

Falso. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4\}$ é LI.

3. (2,0) Considere os planos $\pi_1 : x + y - z = 1$ e $\pi_2 : x + 3y + z = 3$.

   (a) (0,5) Encontre a reta t correspondente à intersecção dos planos π_1 e π_2.

   Somando e subtraindo as equações dos planos temos $x + 2y = 2$ e $y + z = 1$. Assim temos

   $$t : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

   (b) (0,5) Determine a equação do plano π_3 que contém o eixo x e é paralelo à reta t.

   Sejam $\vec{v}_x = (1,0,0)$ e $\vec{v}_t = (-2,1,-1)$ os vetores diretores do eixo x e da reta t, respectivamente. O vetor normal a π_3 é dado por $\vec{n} = \vec{v}_x \times \vec{v}_t = (0,1,1)$. O plano deve conter todo o eixo x, em particular a origem, então temos $\pi_3 : y + z = 0$.

   (c) (0,5) Calcule a distância entre a reta t e o eixo x.

   Sabemos que a origem $O : (0,0,0)$ pertence ao eixo x, e fazendo $\lambda = 1$, temos $P : (0,1,0)$ um ponto da reta t. Temos que $d = proj_{\vec{n}} OP = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (d) (0,5) Determine os pontos que realizam essa distância, isto é, os pontos de t e do eixo x que estão à distância calculada no item anterior.

   Os pontos que realizam essa distância satisfazem

   $$(x_0,0,0) \pm d\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (2 - 2\lambda, \lambda, 1 - \lambda).$$

   Para o sinal $-$ as equações acima não possuem solução, e para o sinal $+$ temos $\lambda = 1/2$. Assim os pontos que realizam essa distância são $P : (1, 1/2, 1/2) \in t$ e $Q : (1,0,0) \in Ox$.

4. (3,0) Considere os planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : 2x + y = 1$ em $\mathbb{R}^3$. Determine a esfera C que passa pela origem e cujo centro pertence à intersecção entre π_1 e π_2 tal que C possui raio mínimo.

   Fato 1: Seja $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Como C passa pela origem temos: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$.

   Fato 2: Os planos π_1 e π_2 se encontram numa reta r. Note que o ponto $(1,-1,0)$ pertence simultaneamente a π_1 e π_2 e, sendo $\vec{n}_i$ a normal ao plano π_i, $i = 1,2$, temos que o vetor diretor da reta r é dado por $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-1,2,-1)$. Assim,

   $$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Levando em conta os Fatos 1 e 2 temos

$$r^2 = f(\lambda) = (1-\lambda)^2 + (y = -1 + 2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 = 6\lambda^2 + 6\lambda + 2,$$

que possui um mínimo para $\lambda = 1/2$. Assim temos

$$C : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$