MA141 - Prova 2
17/10/2012

1. (3,0) Considere o sistema linear com n equações e m incógnitas:

$$AX = B,$$

sendo A uma matriz com n linhas e m colunas, X e B, respectivamente, matrizes coluna com m e n linhas. Suponha n e m maiores que 1 e que não haja linhas ou colunas inteiramente nulas. Assinale as afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas. Para as falsas, exiba um contra exemplo explícito, isto é, escreva um sistema linear qualquer para o qual a afirmação é explicitamente falsa.

   (a) (0,5) Se $n > m$, o sistema **nunca** possui solução única. F

   (b) (0,5) Se $m > n$, o sistema **sempre** possui solução. F

   (c) (0,5) Se A possui linhas que são combinações lineares de outras, o sistema é **sempre** indeterminado (possui infinitas soluções). F

   (d) (0,5) Se A possui colunas que são combinações lineares de outras, o sistema é **sempre** indeterminado (possui infinitas soluções). F

   (e) (0,5) Se para $B = 0$ o sistema tem solução, ele também terá para qualquer $B \neq 0$. F

   (f) (0,5) Se $B = 0$, o sistema **sempre** tem solução. V

2. (3,0) Considere os três planos abaixo:

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + y - z = 0 \\ \pi_2: &\quad 2x + y - z = -1 \\ \pi_3: &\quad ax + y - z = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) (1,0) Determine o valor de a tal que eles se interceptem numa reta e obtenha sua equação paramétrica.

   Das equações de π_1 e π_2 vemos que a intersecção desses dois planos é dada pela reta $r: (-1, 1+t, t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Para que essa seja também uma solução de π_3 devemos ter $-a + 1 + t - t = 1$, ou seja, $a = 0$.

(b) (1,0) Calcule a distância entre essa reta e o eixo Ox.

Seja $A : (0,0,0)$ um ponto da reta Ox e $\vec{u} = (1,0,0)$ seu vetor diretor. Da mesma forma, note que $B : (-1,1,0)$ é um ponto da reta r e $\vec{v} = (0,1,1)$ seu vetor diretor. A distância de retas reversas está na direção que é perpendicular a ambas as retas, portanto definimos $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (0,-1,1)$, de maneira que $d = proj_{\vec{w}} \vec{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) (1,0) Determine os pontos que realizam essa distância.

Os pontos que realizam esse distância satisfazem

$$(x_0, 0, 0) \pm d \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = (-1, 1+t, t).$$

Para o sinal $+$ as equações acima não possuem solução, e para o sinal $-$ temos $x_0 = -1$ e $t = -1/2$. Assim os pontos que realizam essa distância são $A' : (-1,0,0)$ e $B' : (-1, 1/2, -1/2)$.

3. (2,0) Define-se como uma família uniparamétrica de curvas gerada pela reta $y = 0$ e pela elipse $2x^2 + y^2 = 1$ o conjunto de curvas

$$y + t(2x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

com $t \in \mathbb{R}$. Determine os valores de t tais que:

Note que para $t = 0$ a curva tem equação $y = 0$, e para $t \neq 0$ tem equação

$$2x^2 + \left(y + \frac{1}{2t}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4t^2}.$$

(a) (0,5) a curva em questão é o conjunto vazio;

$\nexists t \in \mathbb{R}$ tal que a curva é o conjunto vazio.

(b) (0,5) a curva é uma reta e, nesse caso, ache a equação correspondente;

Para $t = 0$ a curva é $y = 0$, ou seja, o eixo Ox.

(c) (0,5) a curva é uma circunferência e, nesse caso, ache seu centro e raio;

$\nexists t \in \mathbb{R}$ tal que a curva é uma circunferência.

(d) (0,5) a curva é uma elipse e, nesse caso, ache seus semi-eixos maior e menor.

$\forall t \neq 0$ a curva é uma elipse com centro em $\left(0, -\frac{1}{2t}\right)$, e os semi-eixos maior e menor serão, respectivamente, $\sqrt{1 + \frac{1}{4t^2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{4t^2}}$.

4. (2,0) Classifique a cônica de equação $x^2 + 4xy + y^2 = 0$ encontrando o novo sistema de eixos em que o termo misto não aparece. Esboce a cônica, indicando os pontos e retas relevantes.

Para eliminarmos o termo misto, precisamos realizar uma rotação. Assim, seja

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Substituindo na equação dada temos

$$x'^2(1 + 2\sin(2\theta)) + y'^2(1 - 2\sin(2\theta)) + 4\cos(2\theta)x'y' = 0.$$

Para que o termo misto se anule devemos ter $\theta = \pi/4$, e a equação fica

$$3x'^2 - y'^2 = 0 \to \left(\sqrt{3}x' + y'\right)\left(\sqrt{3}x' - y'\right) = 0,$$

que representa duas retas concorrentes (caso degenerado da hipérbole).