MA141 - Prova 1
05/09/2012

1. (2,0): Considere o sistema linear $(\Sigma) : \mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ a & a & 4 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ b \end{bmatrix}.$$

Discuta a solução do sistema em termos dos valores de a e b. Se o sistema for possível indeterminado (SPI), diga quantos são os parâmetros livres.

- $a = 0$

  Neste caso a matriz ampliada do sistema fica $\begin{bmatrix} 0 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & b \end{bmatrix}$, e vemos que se $b = 2$ temos um SPI com 2 parâmetros livres, e se $b \neq 2$ temos um SI.

- $a \neq 0$

  Neste caso a matriz ampliada e escalonada do sistema fica $\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ 0 & a & 4-b & 2 \\ 0 & 0 & 2-b & 2-b \end{bmatrix}$, e vemos que se $b = 2$ temos um SPI com 1 parâmetro livre, e se $b \neq 2$ temos um SPD.

2. (3,0) Considere, em $\mathbb{R}^3$, o ponto $P : (1,2,4)$, o plano $\pi : x + 2y + z + 2 = 0$ e o vetor $\vec{v} = (2,1,1)$. Determine:

   (a) (2,0) o(s) ponto(s) Q tal que a reta que passa por P e Q é paralela a $\vec{v}$ e $d(Q,\pi) = d(Q,P)$;

   Como $\vec{PQ} \parallel \vec{v}$, $Q = P + \lambda\vec{v} = (1 + 2\lambda, 2 + \lambda, 4 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, $d(Q\pi) = d(Q,P)$. Dado um $R \in \pi$, por exemplo, $R = (0,-1,0)$, temos $d(Q,\pi) = ||Proj_{\vec{n}}\vec{RQ}||$, onde $\vec{n} = (1,2,1)$ é a normal ao plano. Obtemos assim $d(Q,\pi) = \frac{|11+5\lambda|}{\sqrt{6}}$. Igualando a $d(Q,P) = \sqrt{6}\lambda$, temos $\lambda = -1$ ou $\lambda = 11$, com $Q = (-1,1,3)$ e $Q = (23,13,15)$, respectivamente.

   (b) (1,0) a reflexão de Q no plano π.

   Se escrevermos $\vec{RQ} = Proj_{\vec{n}}\vec{RQ} + \vec{\omega}$, temos $Refl_{\vec{n}}\vec{RQ} = -Proj_{\vec{n}}\vec{RQ} + \vec{\omega}$, e obtemos $Refl_{\vec{n}}\vec{RQ} = \vec{RQ} - 2Proj_{\vec{n}}\vec{RQ}$.

3. (2,0) Determinar a equação, identificar e descrever a trajetória:

(a) (1,0) de um ponto que se move de maneira que sua distância ao ponto $F : (6,0)$ é sempre igual a duas vezes sua distância à reta $r : 2x - 3 = 0$.

Seja $P : (x_0, y_0)$. Sua distância ao ponto F é $d^2(P,F) = (x_0 - 6)^2 + y_0^2$, e à reta r é $d(P,r) = \frac{|2x_0-3|}{2}$. A condição do enunciado implica $x_0^2/9 - y_0^2/27 = 1$, que é a equação de uma hipérbole horizontal com semi-eixos menor e maior dados por 3 e $\sqrt{27}$, respectivamente.

(b) (1,0) de um ponto que se move de maneira que sua distância ao eixo y é igual a duas vezes sua distância ao ponto $F : (3,2)$.

Seja $P : (x_0, y_0)$. Sua distância ao ponto F é $d^2(P,F) = (x_0 - 3)^2 + (y_0 - 2)^2$, e ao eixo y é $d(P, Oy) = |x_0|$. A condição do enunciado implica $(x_0-4)^2/4 + (y_0-2)^2/3 = 1$, que é a equação de uma elipse com centro em $C : (4,2)$ e semi-eixos menor e maior dados por 2 e $\sqrt{3}$. respectivamente.

4. (3,0) Considere a hipérbole $x^2 - 2y^2 = 1$.

(a) (1,0) Identifique, escreva a equação e esboce a superfície obtida por revolução desta hipérbole em torno do eixo x.

É um hiperbolóide de 2 folhas, dado por $x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 1$.

(b) (1,0) Idem para o eixo y.

É um hiperbolóide de 1 folha, dado por $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.

(c) (1,0) Qual dessas superfícies poderia ser regrada (gerada por movimentos de retas)? Por quê?

Apenas o hiperbolóide de uma folha, pois o de duas folhas possui duas partes desconexas.